Universidade de Aveiro Departamento de Educação
Ano 2012

Virgínia Isabel Domingues Loureiro

Função Derivada: uma abordagem didática no Ensino Secundário

Universidade de Aveiro Departamento de Educação
Ano 2012

Virgínia Isabel Domingues Loureiro

Função Derivada: uma abordagem didática no Ensino Secundário

Relatório de estágio apresentado à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, realizada sob a orientação científica da Doutora Maria Teresa Bixirão Neto, Professora Auxiliar do Departamento de Educação da Universidade de Aveiro

Aos meus pais, irmão, avós e tio…

o júri

Presidente

Prof. Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Prof. Doutora Maria Helena Silva Sousa Martinho
Professora Auxiliar do Instituto de Educação da Universidade do Minho

Prof. Doutora Maria Teresa Bixirão Neto
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

À Professora Teresa Neto, pela orientação, sugestões, críticas, incentivo permanente, compreensão e disponibilidade prestada ao longo deste estudo.

À Professora Isabel Órfão, pelas suas sugestões, apoio, disponibilidade e colaboração neste estudo.

À turma, pela colaboração e empenho demonstrado na realização deste estudo.

À Direção de Escola, por ter permitido a realização deste estudo.

Aos meus pais, que são os meus melhores amigos e que sempre me ensinaram a lutar pelos meus sonhos, sempre acreditaram em mim, e onde em todos os momentos do meu percurso, contribuíram com o seu genuíno amor, carinho e incentivo fazendo de mim uma pessoa abençoada e feliz.

Ao meu mano Nuno, que eu Adoro, que é o meu melhor amigo e melhor irmão do Mundo, por toda a sua compreensão e apoio incondicional, pelo seu carinho, sorrisos e alegrias em todos os momentos da minha vida.

À minha avó Maria e ao meu avô Camilo, que sempre perceberam a importância e a implicação da realização deste trabalho para mim e que sempre contribuíram com o seu amor incondicional e com muita força no alcance do mesmo.

À minha Becas, pela sua Amizade incondicional.

À minha amiga e colega de curso Catarina, pela sua Amizade, apoio, carinho e presença em todos os momentos desta caminhada.

Aos restantes amigos pelo apoio e compreensão da minha ausência em muitos momentos.

Ao meu tio Paulo e ao meu avô Camilo…sempre presentes!

palavras-chave

Conceito de derivada, Taxa de Variação, Interpretação geométrica, Ensino Secundário,Enfoque ontosemiótico

resumo

O presente estudo tem como finalidade descrever o ambiente de aprendizagem gerado em contexto de sala de aula, na aprendizagem do conceito de derivada com alunos do 11.º ano de escolaridade relativamente ao desenvolvimento da unidade didática *Taxa de Variação e Derivada*. Com o intuito de atingir essa finalidade, considerou-se para o efeito as seguintes questões de investigação: a) Que dificuldades foram suscitadas nos alunos na aprendizagem do conceito de derivada de uma função num ponto e função derivada?; b) Em que medida o recurso ao *applet* promoveu a aprendizagem do conceito de derivada de uma função num ponto?; c) Qual a adequação didática da planificação e implementação da unidade didática *Taxa de Variação e Derivada*?

A metodologia usada é de natureza qualitativa e descritiva enquadrando-se num *design* de estudo de caso exploratório. Relativamente, aos instrumentos de recolha dos dados recorreu-se à análise documental, em concreto, a mesma refere-se à resolução das tarefas da unidade didática *Taxa de Variação e Derivada*, pelos alunos, assim como, às notas de campo registadas pelo Núcleo de Estágio de Matemática.

Os resultados sugerem que, na aprendizagem do conceito de derivada de uma função num ponto e função derivada, existem dificuldades relativas ao *conceito imagem* que os alunos têm da noção de tangência geralmente proveniente da Geometria e que quando transposta para o Cálculo a mesma se revela inconsistente (Vinner e Tall), assim como, no uso da linguagem simbólica matemática pelos alunos. Relativamente, ao *applet* este recurso motivou os alunos a assumirem um papel ativo na sua aprendizagem, ao mesmo tempo que, revelou que através da sua exploração estes conseguiram interpretar geometricamente o conceito de derivada de uma função num ponto. No que diz respeito à adequação didática da planificação e implementação da unidade didática *Taxa de Variação e Derivada*, conclui-se pela análise das suas componentes, epistémica, cognitiva, interacional, mediacional, afetiva e ecológica, que houve adequação.

keywords

Derivative concept, Instantaneous rate of change, Geometric interpretation of the derivative, Secondary school, Onto-semiotic focus

abstract

The current study aims to describe the learning environment in an eleventh grade classroom when the students are introduced to the derivative concept, within the scope of the learning topic *Instantaneous Rate of Change and Derivative*. To achieve this goal, the following questions were considered: a) What sort of learning difficulties were the students faced with while teaching the concepts of the derivative of a function at a point and derivative of a function?; b) To what extent the use of an *applet* helped the students to learn the concept of the derivative of a function at a point?; c) What is the didactical suitability of the topic's planning and implementation *Instantaneous Rate of Change and Derivative*?

The nature of the methodology employed is qualitative and descriptive and falls within the features of a case study. Concerning the gathering information tools, we relied ourselves essentially on the analysis of the tasks students were asked to solve during the learning topic *Instantaneous Rate of Change and Derivative*, as well as on the field notes collected by the Mathematic Group.

The results suggest that, while learning the derivative concept of a function at a point and the derivative function, the *concept image* of tangent students retain from Geometry is not consistent with the notion of tangent in Infinitesimal Calculus (Vinner e Tall). Furthermore, students struggled with the correct use of the symbolic language of mathematics. Regarding the use of the *applet*, it incited and motivated students to have a more active role in their learning process and proved to be an efficient learning tool to understand geometrically the concept of derivative of a function at a point. Concerning the didactical suitability of the planning and implementation of the learning topic *Instantaneous Rate of Change and Derivative*, we concluded it was appropriate by analyzing their epistemic, cognitive, interactional, mediational, affective and ecological components.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Capítulo I - Introdução

Neste capítulo começo por apresentar a minha motivação para a realização deste estudo, que visa descrever o ambiente gerado na aprendizagem do conceito de derivada recorrendo para o efeito a algumas tarefas de natureza exploratória e quais as dificuldades sentidas pelos alunos na aprendizagem deste conceito matemático. Neste sentido, procurou-se analisar as orientações curriculares sugeridas no ensino deste tópico, assim como, as principais conclusões de investigações realizadas nesta área. Seguidamente, apresento o problema de investigação, a finalidade e questões de investigação que considerei pertinentes e passíveis de uma resposta, assim como, a organização ao qual este estudo atenderá.

1.1. Motivação para o estudo

No início do estudo da Matemática muitos alunos se questionam sobre a utilidade do estudo desta disciplina, em concreto, em que medida é que determinados conceitos se aplicam em ações do seu dia a dia e/ou como é que esta ciência os pode ajudar na construção do seu futuro. Por vezes, a ausência de uma conexão com a realidade, acaba por os levar a encarar esta disciplina como uma mera ferramenta de uso científico e não como uma linguagem usual e necessária para a sua vida, ou seja, acabam por considerar esta disciplina desnecessária e/ou de difícil compreensão.

Para Silva et al. (2002, p. 3) a Matemática "é uma das bases teóricas essenciais e necessárias de todos os grandes sistemas de interpretação da realidade que garantem a intervenção social com responsabilidade e dão sentido à condição humana".

Partilhando os mesmos pressupostos, Skovsmose (2001, p. 160) refere que ensinar uma matemática mais significativa e que tem em vista os interesses sociais é educar democraticamente, visando o alcance de todos, para que a sociedade possa participar, discutir e refletir as influências desta ciência no dia a dia, formando desta forma um cidadão crítico.

Torna-se pois necessário, retirar a Matemática da abstração que lhe é subjacente, e envolvê-la na sua construção e comunicação com a realidade, isto é, torná-la numa ciência de uso quotidiano ao alcance de todos.

No meu percurso como aluna, sempre nutri o gosto por temas relacionados com a Análise Matemática, despertando-me curiosidade ver a aplicabilidade dos seus conceitos a situações reais, a situações do nosso dia-a-dia. Com o intuito de estabelecer uma conexão da Matemática com o nosso quotidiano, e sabendo à priori que a turma onde o Núcleo de Estágio de Matemática irá efetuar as suas intervenções, envolve alunos do Ensino Secundário, em concreto, do 11.º ano de escolaridade, decidi que o conceito a abordar neste estudo seria o de derivada.

No meu entender, este conceito para além de constituir a base do Cálculo Diferencial e Integral, desempenha um importante papel na resolução de problemas que envolvam a modelação de situações reais e que se estendem a diversos campos do conhecimento. A título de exemplo, posso referir a Física, onde o conceito de derivada surge para definir velocidade e aceleração de uma partícula que se move ao longo de uma curva, a Química, em estudos cinéticos de reações para maximizar a produção de um determinado composto num curto espaço de tempo, a Economia para se determinar o custo e os lucros marginais, a Biologia, nomeadamente, a taxa de crescimento de uma dada cultura de bactérias entre outras tantas aplicações.

Analisando quais as orientações curriculares sugeridas para a aprendizagem deste conceito matemático, o Programa de Matemática A do 11.º ano de escolaridade (Silva et al., 2002, p.5) refere que, pode tornar-se vantajoso a exploração deste conceito em coordenação com as disciplinas de Física, Química, Economia recorrendo, para o efeito a exemplos concretos; à realização de atividades em comum, caso seja possível ou à lecionação de algum aspeto dessas disciplinas que permitam o seu aprofundamento matematicamente. Salienta também, que as noções de taxa média de variação e de taxa de variação/derivada sejam "introduzidas recorrendo ao uso informal da noção de limite" (Silva et al., 2002, p. 5).

Neste sentido, para que os alunos consigam ter sucesso em Matemática, é preciso que os mesmos consigam ter várias representações associadas a um conceito, salientando que, estas se tornam mais ricas quanto mais aspetos interligados àquele conceito tiverem, e mais pobres, se possuírem poucos elementos que flexibilizem o seu uso na procura de uma solução a um dado problema (Aragão, 2012, p. 5).

Assim sendo, a natureza das tarefas e a forma como são realizadas em contexto de sala de aula revelam-se fundamentais no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Cabe ao professor na sua planificação de aulas contemplar uma diversidade de tarefas e experiências de aprendizagem. Logo, as tarefas no seu conjunto devem proporcionar "um percurso de aprendizagem coerente que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos em causa, o domínio da linguagem matemática e das representações relevantes, bem como o estabelecimento de conexões dentro da Matemática e entre esta disciplina e outros domínios" (Ponte et al., 2007, p. 11).

O processo que envolva exploração e descoberta estimula os alunos a pensarem, a irem à procura de soluções face a determinados problemas. No meu entender, penso que é este processo de descoberta que faz com que a Matemática seja encarada como desafiante e atrativa. Neste sentido, o recurso às tecnologias revela ser uma ferramenta essencial, posição que é defendida pela National Council of Teacher of Mathematics (NCTM, 2008, p. 28) que refere que o seu uso "enriquece a extensão e a qualidade das investigações, ao fornecer um meio de visualizar noções matemáticas sob múltiplas perspectivas". Permite também que se possam "analisar mais exemplos ou formas de representação, do que é possível manualmente, de modo a formular e a explorar conjecturas de uma forma fácil. O poder gráfico das ferramentas tecnológicas possibilita o acesso a modelos visuais que são poderosos, mas que muitos alunos são incapazes ou não estão dispostos a realizar de modo independente"(NCTM, 2008, p. 27).

Dreyfus (1991) citado em Roorda et al. (2007, p.2), refere que a "existência de vários tipos de representações sobre um determinado conceito são por si só importantes, como também, as relações e transformações entre eles".

Neste sentido, Dick (1996) citado em Kendal (2001), diz que o ensino do conceito de derivada deve envolver representações numéricas, gráficas e simbólicas, ou seja,

> As capacidades numéricas e gráficas associadas às novas tecnologias trazem novas ferramentas no ensino do cálculo nas salas de aula. Em concreto, neste momento possuímos as ferramentas que nos proporcionam várias representações do conceito de derivada: numericamente através do uso da calculadora que permite uma aproximação do quociente de forma fácil e rápida, graficamente onde se pode explorar a "local linearity" da diferenciação através de uma representação dinâmica, e simbolicamente recorrendo à forma tradicional do papel e lápis e às capacidades algébricas. Esta contribuição das novas tecnologias vem assim desempenhar um importante papel no auxílio à construção de um conhecimento sólido nos alunos sobre o conceito de derivada, uma vez que, permite estabelecer várias conexões entre representações. (p. 21)

Analisando o Programa de Matemática A (Silva et al., 2001, p. 15), este indica-nos que é impossível atingir os objetivos e competências gerais "sem recorrer à dimensão gráfica" e que o uso da mesma promove "uma participação activa do estudante na sua aprendizagem", pelo que recorremos à calculadora gráfica, assim como, ao computador (*applet*) na elaboração da unidade didática *Taxa de Variação e Derivada*. Em concreto, e a título de exemplo, considerámos que seria estimulante/desafiante para o aluno que pudesse recorrer a um *applet* (programa concebido utilizando linguagem Java e que pode ser acedido e executado a partir de um navegador ou *browser* com ligação à internet) para que através da sua exploração de forma intuitiva e gradual consiga construir a noção de derivada de uma função num ponto e posterior formalização.

Neste sentido, quando o ensino procura esta diversidade de abordagens aumentam as possibilidades de os alunos conceberem diferentes processos associados ao conceito de derivada e promover um *conceito imagem* mais rico e mais completo.

Porém, as pesquisas revelam a existência de dificuldades relativas à aprendizagem do conceito de derivada, em concreto, Vinner (1983) e Tall (1989) citados em Giraldo et al. (2003, p. 2) verificaram que o *conceito imagem* que os alunos possuíam relativamente à noção de tangência se encontrava essencialmente associado a problemas de geometria, onde a ideia de tangente a uma curva é de que apenas a " "toca" num único ponto - contrária à ideia de secante - que a "corta" em dois pontos. Ora isto conduz a um estreitamento do *conceito imagem* de tangente que não é consistente com a noção de tangente no Cálculo Infinitesimal" (Giraldo et al., 2003, p. 2).

Em estudos posteriores, Tall (2000) recorre à noção de "local straightness" para explicar o conceito de derivada. Esta noção baseia-se no fato de o gráfico "de uma função diferenciável "parecer reto" quando várias vezes ampliado num computador" (Giraldo et al., 2003, p. 3). Neste sentido, Tall (2000) integra as tecnologias como forma de enriquecer o *conceito imagem* a formar pelos alunos relativamente ao conceito de derivada, porém salienta a existência de situações em que "uma representação computacional é aparentemente contraditória com a formulação teórica associada" onde Giraldo (2001) citado em (Giraldo et al., 2002, p. 3) define por *conflito teórico-computacional*. Segundo Carvalho et al. (2003, p. 6), refere que se estes conflitos "forem trabalhados ao invés de evitados os mesmos contribuem não para o estreitamento mas para o enriquecimento do *conceito imagem* "dos alunos relativamente a um conceito matemático.

Dado que as práticas pedagógicas influenciam a forma como os alunos encaram a Matemática, considerei que seria interessante e pertinente fazer uma abordagem diferente do conceito de derivada, conceito este, que tantas vezes recai no cálculo excessivo de derivadas de várias funções onde são exploradas diversas técnicas de cálculo, e que os alunos tantas vezes o associam a um processo mecanicista em detrimento da atribuição de significado a este conceito matemático.

Assim, na planificação da unidade didática *Taxa de Variação e Derivada*, desenvolveram-se algumas tarefas de natureza exploratória visando o desenvolvimento de capacidades transversais, introduzindo desta forma, uma nova dinâmica nas práticas pedagógicas proporcionando aos alunos experiências de aprendizagens mais significativas e onde estes assumem um papel ativo e desenvolvem um espírito crítico face à sua própria aprendizagem.

A unidade didática *Taxa de Variação e Derivada* é constituída por oito aulas com uma duração de noventa minutos cada. A primeira aula da respetiva unidade intitula-se por "Taxa média de variação. Derivada de uma função num ponto – Interpretação geométrica" e tal como o tópico sugere, refere-se à interpretação geométrica do conceito derivada de uma função num ponto recorrendo para o efeito a um *applet*; a segunda aula intitula-se por "Taxa média de variação. Derivada de uma função num ponto" e visa a aplicação do conceito derivada de uma função num ponto; a terceira aula intitula-se por "Derivada de uma função num ponto – interpretação geométrica" e pretende por via da interpretação geométrica que os alunos afiram o valor da derivada de um função num ponto, assim como, que identifiquem se uma função admite derivada num determinado ponto; a quarta aula intitula-se por "Função Derivada" visa através de uma análise geométrica definir função derivada; a quinta aula intitula-se por "Derivadas da função afim, função polinomial do 2.º e 3.º grau e função racional do tipo $\frac{k}{x}$" e visa deduzir a expressão das derivadas das funções afim, polinomial do 2.º e 3.º grau e da função racional do tipo $\frac{k}{x}$ e consequente, aplicação; sexta aula da unidade intitula-se por, "Derivadas da função afim, função polinomial do 2.º e 3.º grau e função racional do tipo $\frac{k}{x}$ - Aplicação" e visa determinar a expressão da função derivada de algumas funções recorrendo para o efeito aos resultados provados na aula anterior; sétima aula intitula-se por "Sentido de variação e extremos de uma função" e visa que o aluno relacione o sinal da função derivada com a monotonia de uma função; oitava aula intitula-se por "Problemas de optimização" e visa aplicar o estudo da função derivada na resolução de problemas de otimização.

Face ao que tem vindo a ser exposto procuro através da realização deste estudo, aprofundar conhecimentos relativos à conceção de sequências didáticas, sua implementação e averiguar quais as dificuldades sentidas pelos alunos no percurso delineado, visando desta forma enriquecer e melhorar a minha prática pedagógica em ações futuras.

1.2. Problema e Questões de Investigação

No âmbito da Prática de Ensino Supervisionada I e II, surge a oportunidade de desenvolver este estudo que admite os seguintes pressupostos:

- ✓ Desenvolver tarefas de natureza exploratória que integrem recursos tecnológicos como forma de suscitarem aprendizagens mais interessadas, mais consistentes e mais significativas nos alunos, nomeadamente, sobre a aprendizagem do conceito de derivada estabelecendo para o efeito, e sempre que possível, conexão com outras áreas do saber

- ✓ Investigar o tipo de dificuldades sentidas e em que medida a natureza das tarefas promoveram a aprendizagem do conceito de derivada

- ✓ Averiguar a motivação dos alunos na realização deste tipo de tarefas

Assim sendo, a finalidade deste estudo visa descrever o ambiente de aprendizagem gerado em contexto de sala de aula na aprendizagem do conceito de derivada. Para tal, considerou-se as seguintes questões:

a) Que dificuldades foram suscitadas nos alunos durante a aprendizagem do conceito de derivada de uma função num ponto e função derivada?
b) Em que medida o recurso ao *applet* promoveu a aprendizagem do conceito de derivada de uma função num ponto?
c) Qual a adequação didática da planificação e implementação da unidade didática *Taxa de Variação e Derivada*?

Neste sentido, com a realização deste estudo procuro contribuir para o meu crescimento pessoal e profissional melhorando e aprofundando os meus conhecimentos na construção/elaboração de tarefas que envolvam ou não tecnologias, a forma de as elencar coerentemente numa sequência didática, visando sempre o enriquecimento das aprendizagens no aluno. Pretendo também analisar as suas potencialidades e possíveis dificuldades sentidas na sua concretização em contexto de sala de aula.

1.3. Organização do Estudo

O presente estudo encontra-se organizado em seis capítulos. No primeiro capítulo, apresento a motivação para a realização deste estudo, o problema e as questões de investigação, assim como, a organização ao qual este atenderá. No segundo capítulo apresento os conceitos matemáticos e respetivas teorias sobre o ensino e aprendizagem do conceito de derivada. O terceiro capítulo é referente à unidade didática *Taxa de Variação e Derivada*, onde se delineiam os princípios gerais subjacentes à planificação, e se apresenta a planificação propriamente dita. O quarto capítulo diz respeito às opções metodológicas, onde se faz referência às principais caraterísticas dos participantes, assim como, aos instrumentos utilizados na recolha e análise dos dados. O quinto capítulo reporta para a análise e discussão dos resultados. O sexto capítulo culmina com uma síntese relativa aos principais resultados deste estudo e com uma reflexão pessoal sobre a sua realização, salientando os seus contributos para o meu desenvolvimento profissional e pessoal e algumas limitações subjacentes à sua realização.

Capítulo 2 - Referencial Teórico

Este capítulo inicia com uma abordagem sobre o conceito matemático derivada e posteriormente, referência estudos levados a cabo pelos investigadores Shlomo Vinner e David Tall sobre a aprendizagem deste conceito matemático. Embora de uma forma breve, será abordado uma teoria sobre o ensino e aprendizagem da Matemática: o enfoque ontosemiótico, de onde se salientam os objetos que intervêm e emergem dos sistemas de práticas e a adequação didática.

2.1. O Conceito de Derivada

Segundo as indicações metodológicas constantes no Programa de Matemática A do 11.º ano de escolaridade, a aprendizagem do conceito de derivada passa pela interpretação geométrica da taxa de variação onde intuitivamente se trabalha com a noção de limite. Mais, uma vez que o conceito de taxa de variação se encontra presente em outras áreas do saber, privilegia-se desta forma, a utilização e exploração de exemplos ou algum aspeto relevante dessas áreas visando o seu aprofundamento matematicamente (Silva et al., 2002, p. 5).

Neste sentido, e encontrando-nos perante uma turma onde os alunos maioritariamente optaram pela disciplina de Física, decidiu-se recorrer a exemplos desta disciplina para se abordar matematicamente este conceito.

Assim sendo, neste subcapítulo para além de atribuir um significado físico ao conceito de derivada, apresento também, de forma sucinta uma breve perspetiva histórica deste conceito, humanizando e mostrando a matemática como uma “ciência em construção e em constante interação com outras ciências” (Silva et al., 2002, p. 12).

2.1.1. O Problema da Tangente: breve perspetiva histórica

Um dos ramos importantes na área da Matemática, diz respeito, ao Cálculo Diferencial e Integral[1]. Tradicionalmente, atribui-se o mérito a Isaac Newton e Gottfried Leibniz por se considerar que estes foram os seus fundadores no século XVII, contudo, a literatura reconhece que em épocas anteriores, os trabalhos levado a cabo por Arquimedes, Euclides, Appolonius e outros tantos matemáticos, contribuíram de forma significativa na sua evolução.

Segundo Kline (1994), o Cálculo Diferencial e Integral surge com o intuito de resolver os "principais problemas científicos do século XVII" (citado por Oliveira, 2011, p. 15). Assim, os quatro problemas de cariz complexo que suscitavam interesse por parte dos matemáticos da referida época eram: como obter uma tangente a uma curva; como obter valores máximos e mínimos de uma função; como obter o comprimento de curvas, as áreas delimitadas por curvas e volumes formados por superfícies e a noção de velocidade e aceleração.

A determinação de uma tangente a uma curva, foi um dos problemas da área do Cálculo Diferencial que mais requereu investigação, onde Fermat, Barrow e Newton contribuíram com métodos para a sua determinação.

Neste sentido, a noção de derivada foi explicada pela primeira vez, no século XVII, por um matemático francês de nome Pierre de Fermat na tentativa de determinar o máximo e o mínimo de uma função. (Teixeira et al., 1998, p. 28) Na sequência do estudo de várias funções , Fermat apercebeu-se da limitação do conceito clássico de reta tangente a uma curva, como sendo aquela que encontra a curva num único ponto. Assim sendo, a necessidade de reformular este conceito levou-o a encontrar um processo para a sua determinação, trabalho este que Fermat intitulou por *Sobre as tangentes de linhas curvas,* e que enviou posteriormente a Mersenne (1588-1648) para divulgação junto de outros matemáticos da época. Em seguida apresento o seu processo de traçar uma tangente a uma curva.

[1] Na literatura pode também ser encontrado com a denominação de Cálculo Infinitesimal ou simplesmente, Cálculo.

- **Método de Fermat (1601-1665)**

Consideremos a seguinte figura:

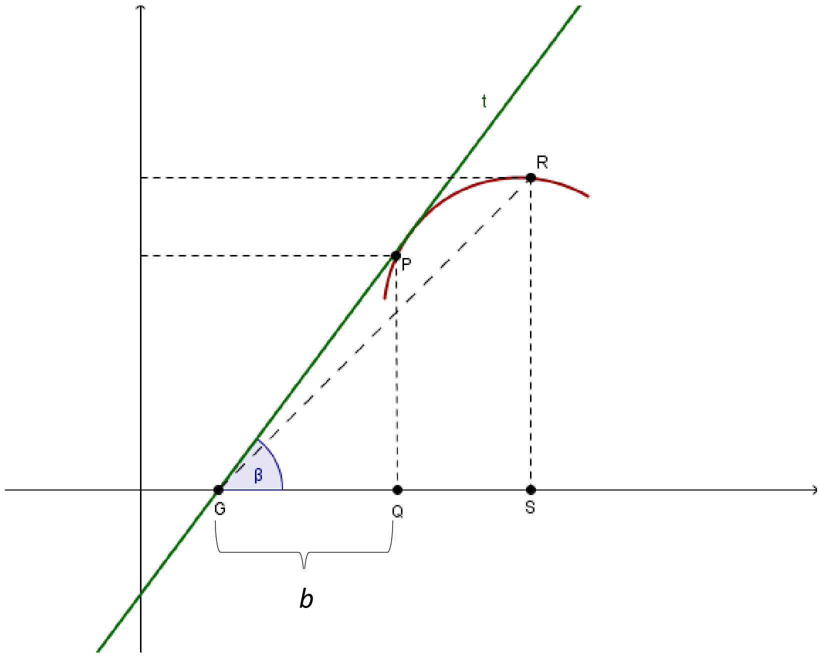


Figura 2.1: Método de Fermat para a tangente a uma curva (adaptado de Oliveira, 2011, p. 17)

Seja P um ponto genérico da curva $f(x)$ com coordenadas $P = (x_0, y_0)$ e no qual se pretende passar uma tangente, t. Pela análise da figura Fermat conclui que, $tg\,\beta = \frac{PQ}{GQ}$ (Oliveira, 2011, p. 17). Agora considerando que $y = f(x)$ e denotando a medida do segmento de reta GQ por $b \neq 0$ tem-se que $tg\beta = \frac{f(x_0)}{b}$. Pretendendo encontrar o valor de b, considerou outro ponto desta curva que designamos por R e com coordenadas $R = (x_o + E, f(x_0 + E))$ e próximo do ponto P. Admitindo então esta proximidade entre os dois pontos P e R considerou que R também pertenceria à reta tangente t, verificando uma semelhança entre os triângulos, $[PGQ]$e $[RGS]$. (Oliveira, 2011, p. 17)

Desta forma tem-se que:

$\frac{PQ}{GQ} = \frac{RS}{GS}$, ou seja, $\frac{f(x_0)}{b} = \frac{f(x_0 + E)}{b + E} \Leftrightarrow (b + E)f(x_0) = bf(x_0 + E)$

$$\Leftrightarrow bf(x_0) + Ef(x_0) = bf(x_0 + E)$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{Ef(x_0)}{f(x_0 + E) - f(x_0)}$$

Substituindo o valor de *b*, na expressão $tg\beta = \frac{f(x_0)}{b}$, conclui-se que:

$$tg\beta = \frac{f(x_0 + E) - f(x_0)}{E}$$

Uma vez que a noção de limite era até então desconhecida, Fermat considerou que o valor a ser atribuído a E deveria ser "sabiamente escolhido" (Oliveira, 2011, p. 17), com isto queria ele dizer, que deveria tender para zero, chegando à definição que hoje é conhecida:

$$tg\beta = \lim_{E \to 0} \frac{f(x_0 + E) - f(x_0)}{E}$$

(Oliveira, 2011, p. 17)

- **Método de Barrow (1630-1677)**

O método a que Barrow recorre para determinar a tangente a uma curva é semelhante ao processo utilizado por Fermat, porém, com algumas variações. Este usa duas quantidades ao invés da letra E única de Fermat, quantidades essas, que equivalem aos modernos Δx e Δy. (Boyer, 1999, p. 267)

Consideremos a seguinte figura:

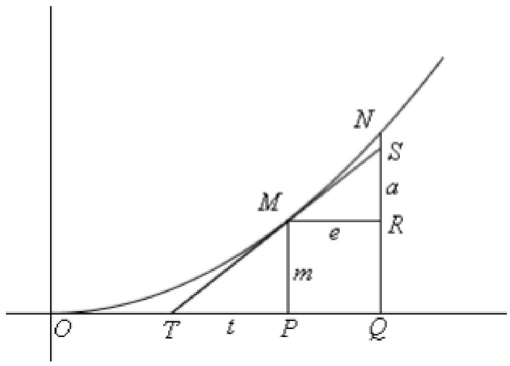


Figura 2.2: Representação do método proposto por Barrow (adaptado de Boyer, 1999, p. 267)

Seja M um ponto sobre a curva dada com a equação polinomial $f(x, y) = 0$ e T o ponto de interseção da reta tangente MT com o eixo Ox, que Barrow considerava um "arco infinitamente pequeno MN da curva" (Boyer, 1999, p. 267). Seguidamente, traçou-se um segmento de reta paralelo ao eixo Ox que passava pelo ponto M e pelo ponto R cuja abcissa corresponde à abcissa do ponto N. Designando por m a ordenada do ponto P , por t a medida do comprimento do segmento de reta PT, por a a medida de comprimento do segmento de reta NR e por e, a medida de comprimento do segmento de reta MR, então, este chega à conclusão que os triângulos $[MNR]$e $[TMP]$ são semelhantes, logo, $\frac{a}{e} = \frac{m}{t}$. Ou seja, a razão $\frac{a}{e}$ não é mais do que o declive da reta tangente à curva no ponto M. A fim de determinar o seu valor, Barrow substituiu x e y na equação polinomial $f(x, y) = 0$ por $x + e$ e $y + a$, e na equação daí resultante, desprezou os termos de grau superior a 1 em a e e considerando que estes podem ser tão pequenos quanto se queira. (Basilio, 2006, p. 14)

- **Método de Newton (1642 - 1727)**

O método que Newton desenvolveu para determinar a tangente a uma curva, denomina-se por método das fluxões. Na elaboração do mesmo, este sentiu a necessidade de criar uma linguagem própria, para poder explicitar as suas ideias, assim sendo, designou por: x , y de *fluentes*, uma vez que, as variáveis aumentam ou diminuem em função do tempo; $\dot{x}$, $\dot{y}$ por *fluxões* que se refere às velocidades destas quantidades; e, por "o" um momento infinitamente pequeno.

Neste sentido, consideremos a seguinte curva de equação $f(x, y) = 0$,

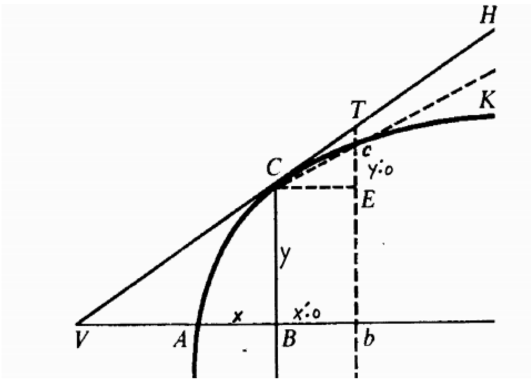


Figura 2.3: Método de Fluxões de Newton (Pires, 2004, p. 49)

Newton procurava então através da relação entre os *fluentes* $f(x, y)$ encontrar a relação entre os *fluxões*, verificando que:

> - Se traçar o segmento de reta Cc e fazer tender o segmento de reta paralelo a Oy que passa pelo ponto b e pelo ponto c para o segmento de reta BC, o ponto c , vai-se aproximando do ponto C, no sentido inverso ao descrito pela curva. Isto significa que, o segmento de reta Cc vai praticamente coincidir com a reta tangente à curva no ponto C. Através deste movimento, o triângulo $[CEc]$ vai-se desvanecendo e fazendo coincidir com o triângulo $[CET]$. (Pires, 2004, p. 49)

Uma vez que, durante "um incremento "infinitamente pequeno" de tempo, designado por "o", os deslocamentos de x e y sofrem incrementos "infinitesimais" $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$" (Ávila, 1993, p. 140), Newton seguindo o raciocínio anterior, verifica que:

$$\frac{Ec}{CE} = \frac{\dot{y}o}{\dot{x}o}$$

ou seja, na posição limite, $\frac{ET}{CE}$ corresponde ao declive da reta tangente à curva no ponto C.

Logo, a forma que Newton encontrou para determinar a tangente a uma curva de equação $f(x, y) = 0$, passa por substituir x por $x + \dot{x}o$ e y por $y + \dot{y}o$ na equação dada, dividir os termos por o, visto se tratar de uma quantidade muito pequena e desprezar aqueles que ainda o contenham, determinando assim a razão entre os fluxões $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

2.1.2. Derivada como uma taxa de variação

A noção de derivada surge quando se procura exprimir em termos precisos (matemáticos) algumas noções intuitivas como a velocidade ou a aceleração de um ponto móvel sobre uma reta.

Neste sentido, vamos considerar um ponto P que se move sobre uma reta e cuja posição em cada instante t é definida pela função $s(t)$ *(lei do movimento)*. Sejam t_0 e t dois instantes distintos, onde $t_0 < t$, então, designa-se por ***velocidade média*** de P no intervalo $[t_0, t]$, ao quociente entre o espaço percorrido e o tempo gasto no percurso e representa-se por:

$$\boldsymbol{v_m} = \frac{\Delta \boldsymbol{s}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Se o limite quando $t \to t_0$ da velocidade média no intervalo $[t_0, t]$, existe e for finito, então, designa-se por ***velocidade*** no instante t_0 e representa-se por:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

De forma análoga, se define a ***aceleração*** no instante t_0 como sendo:

$$a(t_0) = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

(adaptado de Guerreiro, 1989, p. 295).

Com base nas noções anteriores, ficamos com uma ideia intuitiva da noção de variação. Matematicamente, esta noção de variação é interpretada como uma taxa, podendo formalizar os seguintes conceitos:

Definição de taxa média de variação:

Dada uma função $y = f(x)$ definida num intervalo aberto $I \in \mathbb{R}$. Designa-se por ***taxa média de variação*** ou ***taxa de variação média*** de f em $[x_1, x_2] \subset I$, à razão $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, e representa-se por:

$$t.m.v._{[x_1,x_2]} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(adaptado de Teixeira et al., 1998, p.45).

Definição de taxa de variação instantânea:

Dada uma função $y = f(x)$ definida num intervalo aberto $I \in \mathbb{R}$. Designa-se por ***taxa de variação instantânea*** de f em $x_1 \epsilon I$ ao limite da taxa média de variação de f em $[x_1, x_2]$ quando x_2 tende para x_1 à derivada de *f* em x_1 .

(adaptado de Teixeira et al., 1998, p.46).

De uma forma geral, a derivada de uma função exprime a taxa de variação instantânea de uma função.

2.1.3. Interpretação geométrica

Consideremos a seguinte figura:

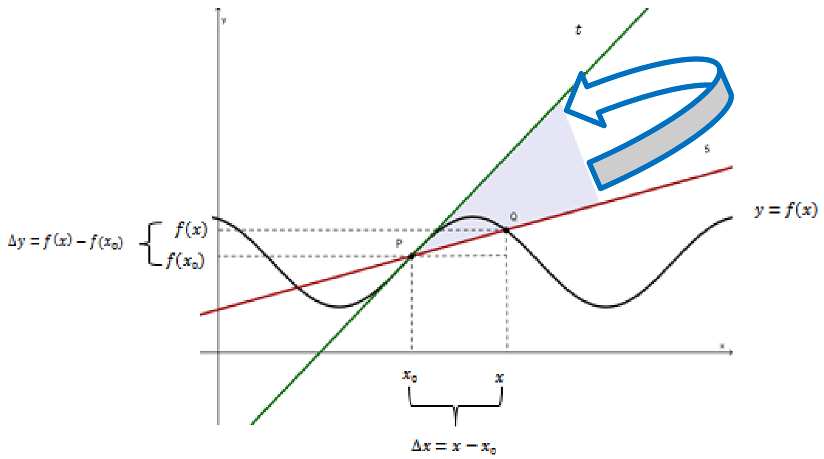


Figura 2.4: Interpretação geométrica de derivada de uma função num ponto (adaptado de Davis et al., 2007, p. 166)

Seja *C* a curva descrita pela equação $y = f(x)$ definida num intervalo aberto $I \in \mathbb{R}$ onde $x_0 \in I$ e sejam $P = \big(x_0, f(x_0)\big)$ e $Q = (x, f(x))$ dois pontos pertencentes à curva. Seja *s* a reta secante à curva *C* que passa pelos pontos P e Q, então, a razão $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (designada também, por ***razão incremental*** de *f* no ponto x_0) corresponde ao declive da reta s. Neste sentido, quando $x \to x_0$ as sucessivas retas secantes que passam pelo ponto P aproximam-se da reta tangente a *C* nesse mesmo ponto (caso essa tangente exista), por outras palavras, t pode ser encarada como a "posição limite" da secante s, quando $x \to x_0$. Isto significa dizer que, o declive da reta tangente à curva C no ponto P corresponde ao limite dos declives das retas secantes quando $x \to x_0$.

Definição: "Suponhamos x_0 um ponto do domínio da função *f*. A reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é a reta de equação

$$y - f(x_0) = m_{tg}(x - x_0)$$

onde,

$$m_{tg} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

sempre que existir o limite" (Davis et al., 2007, p.166).

2.1.4. Definição de derivada de uma função num ponto

Seja *f* uma função definida num intervalo aberto $I \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Chama-se **derivada** de *f* em x_0 ao número real limite da razão incremental, e escreve-se:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

<u>*Notação:*</u> $f'(x_0)$ pode representar-se também por: $D_f(x_0), \frac{dy}{dx}(x_0), \frac{\partial y}{\partial x}(x_0), \frac{df}{dx}(x_0)$.

(adaptado de Teixeira et al., 1998, p. 30)

Obs.: Seja f uma função definida num intervalo aberto $I \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. À razão $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ designa-se por razão incremental de *f* entre x_0 e $x_0 + h$.

<u>Nota:</u>

1) Se existe derivada de *f* em x_0 diz-se que *f* é derivável ou diferenciável no ponto x_0
2) Se o limite da razão incremental $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ quando $h \to 0$, for $+\infty$ ou $-\infty$ diz-se que a derivada é $+\infty$ ou $-\infty$

(adaptado de Teixeira et al., 1998, p. 30).

Embora a noção de vizinhança não tenha sido abordada com os alunos de uma forma formal, a mesma foi trabalhada de forma intuitiva nas aulas relativamente à aprendizagem do conceito de derivada de uma função num ponto. Assim sendo, tem-se:

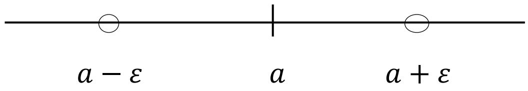
Definição de vizinhança de um ponto

"Seja $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$; chamaremos vizinhança ε de a, e designaremos por $V_\varepsilon(a)$, o conjunto de todos os números reais x cuja distância a a é menor do que ε:

$$V_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}: d(x, a) < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R}: |x - a| < \varepsilon\}$$"

(Ferreira, 1999, p.65).

“Geometricamente, a vizinhança ε de a é representada por um segmento de recta (privado dos extremos) com centro no ponto que corresponde a a e comprimento 2ε



$$V_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$$“

(Ferreira, 1999, p.65).

Com base na definição de derivada de uma função num ponto apresenta-se de seguida a definição de derivadas laterais (derivada lateral à esquerda e derivada lateral à direita):

Derivadas laterais

Seja *f* uma função definida num intervalo aberto $I \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$.

1. Diz-se que *f* é derivável à esquerda de x_0 , se existe

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ ou } \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

a que se chama derivada de *f* à esquerda de x_0 e que se representa por $f'(x_0^-)$

De forma análoga,

2. Diz-se que *f* é derivável à direita de x_0 , se existe

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ ou } \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

a que se chama derivada de *f* à direita de x_0, e que se representa por $f'(x_0^+)$

<u>Nota:</u> *f* é diferenciável em x_0, se e só se existirem derivadas laterais iguais em x_0, tendo então, $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0)$

(adaptado de Teixeira et al., 1998, p. 40).

2.1.5. Definição de função derivada

Seja f uma função real definida num intervalo aberto I de $\mathbb{R}$. Então, f diz-se diferenciável em I ou somente diferenciável, se é diferenciável em todos os pontos de I. Neste caso, define-se uma função $\varphi: I \to \mathbb{R}$ em que,

$$\varphi(x) = f'(x), \forall x \in I$$

a qual se chama função derivada ou derivada de f e representa-se por f', D_f ou $\frac{df}{dx}$

(adaptado de Guerreiro, 1989, p.300).

Segundo os conteúdos programáticos constantes no Programa de Matemática A do 11.º ano de escolaridade, relativamente à temática *Taxa de Variação e Derivada*, prevê-se a determinação da derivada em casos simples, isto é, "a derivada da função afim, das funções polinomiais do 2.º e 3.º grau e da função racional do 1.º grau" (Silva et al., 2002, p.7). Uma vez que, a noção de limite foi trabalhada de forma intuitiva nas aulas e não pretendendo apresentar como regra as derivadas das funções acima mencionadas, bem pelo contrário, pretendendo atribuir significado às mesmas e consequentemente levar os alunos a compreenderem genuinamente de onde estas provêm, os mesmos foram solicitados a chegar às suas expressões, recorrendo para o efeito aos conceitos até então aprendidos. Assim sendo, através da definição de taxa média de variação, estes chegariam aos seguintes resultados:

- <u>**Função afim:**</u> $f(x) = mx + b, \text{com } m, b \in \mathbb{R} \text{ e } m \neq 0$

$$\begin{aligned} t.m.v._{[a,a+h]} &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{m(a+h) + b - (ma+b)}{h} \\ &= \frac{mh}{h}, quando\ h \to 0 \\ t.m.v._{[a,a+h]} &\to m \end{aligned}$$

logo, $f'(x) = m$.

Caso particular da função afim: $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
t.m.v._{[a,a+h]} &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\
&= \frac{k-k}{h}, quando\ h \to 0 \\
t.m.v._{[a,a+h]} &\to 0
\end{aligned}
$$

logo, $f'(x) = 0$.

- **<u>Função quadrática do tipo</u>** $f(x) = ax^2$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$
\begin{aligned}
t.m.v._{[x_0,x_0+h]} &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
&= \frac{a(x_0+h)^2-ax_0^2}{h} \\
&= \frac{a(x_0^2+2x_0h+h^2)-ax_0^2}{h} \\
&= \frac{2ax_0h+ah^2}{h} \\
&= \frac{h(2ax_0+ah)}{h}, quando\ h \to 0 \\
t.m.v._{[x_0,x_0+h]} &\to 2ax_0
\end{aligned}
$$

logo, $f'(x) = 2ax$.

- **Função polinomial do 2.ºgrau:** $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

$$
\begin{aligned}
t.m.v._{[x_0, x_0+h]} &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&= \frac{a(x_0+h)^2 + b(x_0+h) + c - (ax_0^2 + bx_0 + c)}{h} \\
&= \frac{a(x_0^2 + 2x_0 h + h^2) + bx_0 + bh + c - ax_0^2 - bx_0 - c}{h} \\
&= \frac{2ax_0 h + ah^2 + bh}{h} \\
&= \frac{h(2ax_0 + ah + b)}{h}, quando\ h \to 0 \\
t.m.v._{[x_0, x_0+h]} &\to 2ax_0 + b
\end{aligned}
$$

logo, $f'(x) = 2ax + b$.

De uma forma análoga, se deduz a função polinomial do 3.º grau.

- **Função cúbica do tipo** $f(x) = ax^3$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$
\begin{aligned}
t.m.v._{[x_0, x_0+h]} &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&= \frac{a(x_0+h)^3 - (ax_0^3)}{h} \\
&= \frac{a(x_0^2 + 2x_0 h + h^2)(x_0+h) - ax_0^3}{h} \\
&= \frac{a(x_0^3 + x_0^2 h + 2x_0^2 h + 2x_0 h^2 + h^2 x_0 + h^3) - ax_0^3}{h} \\
&= \frac{h(3ax_0^2 + 3ax_0 h + ah^2)}{h}, quando\ h \to 0 \\
t.m.v._{[x_0, x_0+h]} &\to 3ax_0^2
\end{aligned}
$$

logo, $f'(x) = 3ax^2$.

- **Função racional do tipo** $f(x) = \frac{k}{x}$, com $k, x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$

$$
\begin{aligned}
t.m.v._{[x_0, x_0+h]} &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
&= \frac{\frac{k}{x_0+h} - \frac{k}{x_0}}{h} \\
&= \frac{\frac{kx_0 - kx_0 - kh}{x_0(x_0+h)}}{h} \\
&= \frac{-kh}{h(x_0^2 + x_0 h)}, quando\ h \to 0 \\
t.m.v._{[x_0, x_0+h]} &\to -\frac{k}{x_0^2}
\end{aligned}
$$

logo, $f'(x) = -\frac{k}{x^2}$.

2.1.6. Sentido de variação e extremos de uma função

Neste tópico começo por apresentar o Teorema de Lagrange, pois é a partir deste que derivam corolários importantes que servem de suporte ao desenvolvimento de algumas aulas da unidade didática *Taxa de Variação e Derivada.*

Teorema do Valor Médio de Lagrange

Seja f uma função real de variável real contínua num intervalo $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, então, existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dem.: Consideremos,

$$\beta = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

então, $f(b) - \beta b = f(a) - \beta a$. Esta igualdade evidência que a função $\varphi(x) = f(x) - \beta x$ toma iguais valores nos extremos do intervalo $[a, b]$. Assim sendo, seja φ contínua e diferenciável no interior deste intervalo, logo pelo Teorema de Rolle verifica-se imediatamente que existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que, $\varphi'(c) = 0$. Como $\varphi'(c) = f'(c) - \beta$, conclui-se que:

$$f'(c) = \beta = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

c.q.d.

(adaptado de Ferreira, 1999, p. 380).

<u>Nota:</u>

Teorema de Rolle: Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, e diferenciável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, então, existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

(adaptado de Ferreira, 1999, p. 376)

Do Teorema de Lagrange resultam então os seguintes corolários:

Corolário 1: Se $f(x)$ tem derivada nula em todos os pontos dum intervalo aberto $I \in \mathbb{R}$, então $f(x)$ é constante em I.

Dem.: Sejam $x_1\ e\ x_2$ dois pontos distintos do intervalo aberto I ,onde se considera para o efeito que, $x_1 < x_2$. Pela hipótese tem-se que $f(x)$ é diferenciável, logo também é contínua no intervalo $[x_1, x_2]$. Neste sentido, pelo teorema de Lagrange, garante-se a existência de um ponto $c \in]x_1, x_2[$ tal que:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$$

Como, pela hipótese $f'(c) = 0$, tem-se então que $f(x_1) = f(x_2)$, ou seja, que $f(x)$ é constante em I. ***c.q.d.***

(adaptado de Ferreira, 1999, p. 381).

Corolário 2: Seja f uma função contínua em $[a, b] = I$ e diferenciável no intervalo aberto $I \in \mathbb{R}$, então:

i) Se $f'(x) \geq 0$ para todo o $x \in I$, então f é crescente em I
ii) Se $f'(x) \leq 0$ para todo o $x \in I$, então f é decrescente em I

Dem.: Provaremos apenas a alínea i), uma vez que, de forma análoga se prova a alínea ii). Assim sendo, consideremos para o efeito, dois pontos $x_1, x_2 \in I$, tais que, $x_1 < x_2$. Com base no Teorema de Lagrange, tem-se que: $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\gamma)$ e $x_1 < \gamma < x_2$, de onde se pode concluir que, $f(x_1) \leq f(x_2)$. ***c.q.d.***

(adaptado de Guerreiro, 1989, p. 326).

Corolário 3: Seja f uma função contínua em $[a, b] = I$ e diferenciável num intervalo aberto $I \in \mathbb{R}$, então:

i) Se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in I$, então f é estritamente crescente em I
ii) Se $f'(x) < 0$ para todo o $x \in I$, então então f é estritamente decrescente em I

Dem.:

A demonstração é análoga à do **corolário 2**.

(adaptado de Ferreira, 1999, p. 382).

O teorema que a seguir apresento, dá a condição necessária para a existência de extremo num ponto interior ao domínio da função, ou seja, que permite selecionar em que pontos interiores ao seu domínio uma função diferenciável pode ter extremos. Assim sendo, tem-se:

Teorema de Fermat

Seja f uma função definida num intervalo $I \in \mathbb{R}$ e a um ponto interior a $I \in \mathbb{R}$. Se f é diferenciável em a e tem um extremo em $(a, f(a))$ então $f'(a) = 0$.

Dem.: Consideremos a função f que admite um mínimo em $(a, f(a))$. Então isto significa dizer que, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(a)$, para todo o $x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$. Admitamos duas sucessões (u_n) e (v_n), convergentes para a, tais que, $u_n \in]a - \varepsilon, a[$ e $v_n \in]a, a + \varepsilon[$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, onde (u_n) é crescente e (v_n) é decrescente.

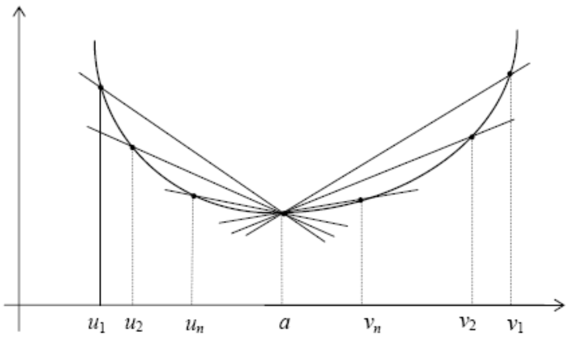


Figura 2.5.: Sucessões (u_n) e (v_n) a convergir para o ponto a
(Teixeira et al., 1998, p. 55)

Então, $\frac{f(u_n)-f(a)}{u_n-a} \leq 0$ e $\frac{f(v_n)-f(a)}{v_n-a} \geq 0$, ou seja, os declives das secantes que unem os pontos $(u_n, f(u_n))$ com o ponto $(a, f(a))$ são negativos e os declives das secantes que unem os pontos $(v_n, f(v_n))$ com o ponto $(a, f(a))$ são positivos. Assim sendo, como f é diferenciável em a, tem-se pela definição de limite segundo Heine, que:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(u_n) - f(a)}{u_n - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(v_n) - f(a)}{v_n - a}$$

Como,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(u_n)-f(a)}{u_n-a}\leq 0\,,\text{porque }\frac{f(u_n)-f(a)}{u_n-a}\leq 0$$

e ,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(v_n)-f(a)}{v_n-a}\geq 0,\text{porque }\frac{f(v_n)-f(a)}{v_n-a}\geq 0$$

conclui-se que, $f'(a)\leq 0$ e $f'(a)\geq 0$, isto é, $f'(a)=0$ ***c.q.d.***

(adaptado de Teixeira et al., 1998, p. 55).

De referir que, esta condição é a necessária e não suficiente para que $f(x)$ tenha máximo ou mínimo relativo a a. Neste sentido, serão explorados na aula com os alunos os casos da função $f(x)=x^3$ que tem derivada nula na origem e não tem máximo nem mínimo nesse ponto sendo estritamente crescente, assim como, o caso da função $f(x)=|x|$, onde a função não admite derivada no ponto de abcissa 0, contudo, a derivada da função à esquerda do ponto é negativa e à direita desse mesmo ponto, é positiva, logo, está-se perante um extremo da função f,ou seja, $f(0)$ é um mínimo da função f.

Nota:

Definição de Ponto Interior

"Seja $X\subset\mathbb{R}$ e $a\in\mathbb{R}$. Se existe $\varepsilon>0$ tal que $V_\varepsilon(a)\subset X$, diz-se que o ponto a é interior ao conjunto X. "

(Ferreira, 1999, p.67).

Definição de Máximo Relativo

"Seja f uma função real de variável real definida num conjunto $D\subset\mathbb{R}$ e a um ponto de D. Diz-se que f tem um ***máximo local ou relativo*** no ponto a ou que $f(a)$ é um ***máximo local ou relativo*** da função f se e só se existir um $\varepsilon>0$ tal que, para todo o $x\in V_\varepsilon(a)\cap D$, se tenha $f(x)\leq f(a)$".

(Ferreira, 1999, p. 372)

Definição de Mínimo Relativo

"Seja f uma função real de variável real definida num conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e a um ponto de D. Diz-se que f tem um ***mínimo local ou relativo*** no ponto a ou que $f(a)$ é um ***mínimo local ou relativo*** da função f se e só se existir um $\varepsilon > 0$ tal que, para todo o $x \in V_\varepsilon(a) \cap D$, se tenha $f(x) \geq f(a)$".

(Ferreira, 1999, p. 373)

Nota: Usualmente, quando se fala de uma forma indistinta de máximos ou mínimos locais, recorre-se à expressão extremos locais ou extremos relativos.

2.2. Aprendizagem do Conceito de Derivada

2.2.1. *Conceito imagem* e *conceito definição*

No âmbito da Educação Matemática nas últimas décadas vários estudos têm sido levados a cabo sobre as dificuldades sentidas pelos alunos no processo de ensino e aprendizagem de conceitos relacionados com o Cálculo Diferencial e Integral ou Cálculo Infinitesimal.

Conceitos como limite, continuidade, derivada, integral são alguns exemplos que revelam maior complexidade na sua aprendizagem, não só devido à abstração inerente aos próprios conceitos matemáticos, como também relativamente aos processos de representação envolvidos e que dificultam a sua compreensão por parte dos alunos.

Aliado à complexidade destes conceitos se se tiver uma prática pedagógica essencialmente focada em procedimentos, como por vezes acontece em relação ao conceito de derivada, onde apenas é privilegiado o cálculo de várias funções explorando várias técnicas/regras de derivação, então, dificilmente os alunos conseguirão compreender as ideias fundamentais associadas a este conceito enfrentando sérias dificuldades no Ensino Superior.

Neste sentido, a construção de significados por parte do aluno, objetivo principal no ensino de Matemática, e em particular, no ensino do Cálculo Infinitesimal torna-se assim fundamental, tendo investigadores como David Tall e Shlomo Vinner desenvolvido a sua investigação/teoria em torno da problemática da construção dos conceitos matemáticos defendendo que a compreensão dos conceitos matemáticos ocorre com base nas noções de *conceito imagem* e *conceito definição*[2].

No decurso do nosso dia-a-dia muitos dos conceitos que utilizamos, não se encontram formalmente definidos mas, através da vivência/experiência aprendemos a reconhecê-los e a contextualizá-los. É no decurso do processo de interiorização e manipulação de um conceito que vários mecanismos de forma consciente ou não, vão afetando o seu significado e contexto.

---

[2] Designadas no original por *concept image* and *concept definition*. Esta tradução, pode ser encontrada em outros autores com a denominação de *imagem conceitual* e *definição conceitual*.

Neste sentido, Tall e Vinner (1981, p. 152) definiram *conceito imagem* como a "estrutura cognitiva total associada a um certo conceito matemático na mente de um indivíduo, onde se incluem todas as imagens mentais, propriedades, processos e representações mentais relacionados com o conceito", ou seja, por outras palavras pode-se dizer que corresponde a algo não verbal que na nossa mente é associado ou que nos remete para, quando se evoca um determinado conceito.

Assim sendo, a diversidade de experiências que vão sendo vividas pelo indivíduo, faz com que o *conceito imagem* relativo a um determinado conceito vá sendo progressivamente construído e alterado sempre que este se depara com novos estímulos. Contudo, convém salientar que este *conceito imagem* formado pelo indivíduo pode nem sempre ser coerente, uma vez que, diferentes estímulos podem ativar diferentes partes do *conceito imagem* no cérebro do indivíduo.
Desta forma, Tall e Vinner (1981, p. 152), definiram que a " porção do *conceito imagem* que é ativada num determinado momento se designa por *conceito imagem evocada*".

Visto o conceito imagem poder ser ou não proveniente de definições formais matemáticas, Tall e Barnard (1997), definiram por *unidades cognitivas* "a porção do conceito imagem que leva o indivíduo a ficar atento por um período de tempo" (citados por Carvalho et al., 2003, p. 2). As unidades cognitivas podem então ser símbolos, teoremas, representações, propriedades ou qualquer outro aspeto relacionado com o conceito. Ambos os investigadores, defendem que é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio matemático a habilidade de construir múltiplas e flexíveis relações entre as *unidades cognitivas*, permitindo desta forma aceder a informações relevantes sempre que necessário (Carvalho et al., 2003, p. 2). Assim sendo, um *conceito imagem* deve incluir, não apenas a definição formal de um determinado conceito, mas também, estabelecer conexões com e entre as unidades cognitivas promovendo desta forma o seu enriquecimento.

Relativamente ao *conceito definição*, Tall e Vinner (1981, p. 152) entendem como a "forma verbal a que um indivíduo recorre para explicar um dado conceito", por outras palavras, pode-se dizer que, "o conhecimento da definição não nos garante a compreensão do conceito […] mas sim, que se precisa de criar um conceito imagem" (Vinner, 1991, p. 69). Contudo, é preciso referir que existem conceitos que podem ser introduzidos através da definição, uma vez que, se acredita que estes possam facilitar a formação do *conceito imagem* no indivíduo. Ou seja, para Vinner (1991, p. 69), a importância do *conceito definição* serve como "suporte à construção do *conceito imagem*

[…] mas a partir do momento em que o conceito imagem é formado o *conceito definição* torna-se prescindível […] podendo permanecer inativo ou mesmo até ser esquecido”.

Quando uma “parte do *conceito imagem* ou do *conceito definição* entra em conflito com outra parte do *conceito imagem* ou do *conceito definição*, a isto se designa por, *fator de conflito potencial*. Estes fatores podem não ser evocados em situações que causem real conflito cognitivo, mas caso ocorram, os fatores resultantes designam-se por factores de conflito cognitivo”(Amorim, 2011, p. 14).

Apesar de os termos *conceito imagem* e *conceito definição* serem utilizados por ambos os investigadores, Tall admite a existência de diferenças na forma como os mesmos são abordados, demonstrando uma diferente concepção dos objetos matemáticos daquela que é apresentada por Vinner.

Para Tall (2003, sp), Vinner quando se refere a *conceito imagem* e *conceito definição* refere-se a duas células distintas na estrutura cognitiva que constituem a base do seu modelo de formação de conceitos. Com uma opinião diferente, Tall considera que a mente consiste na forma como o cérebro funciona pelo que é indivisível deste. Assim, ao invés da separação entre *conceito imagem* e *conceito definição* sugerido por Vinner, Tall considera que o *conceito definição* é a forma como as palavras podem ser escritas ou faladas, sendo por isso, uma parte ou parcela do *conceito imagem* total formado na mente/cérebro do indivíduo. Isto é, para Tall o *conceito imagem* descreve a estrutura cognitiva total que é associada ao conceito, e o *conceito definição* não se restringe apenas à definição formal conhecida pela comunidade matemática como também pode estar relacionado com uma construção pessoal concebida pelo aluno onde esta pode variar ao longo do tempo.

Convém salientar que apesar de os termos serem abordados de forma diferente, ambos os autores concluem que a diferença é de natureza estritamente formal, pelo que não se encontra em causa a teoria desenvolvida.

De uma forma geral, o processo de construção de conhecimento envolve dois tipos de abordagens: as *abordagens naturais* e as *abordagens formais*. As diferenças entre uma e outra reside no fato de as primeiras serem construídas/geradas a partir do *conceito imagem* com o intuito de atribuir significado pessoal à definição formal, ou seja, são "construídos exemplos relacionados com a definição de um determinado conceito matemático que são geralmente consistentes para serem usados como base de experiências de pensamento para imaginar possíveis teoremas, assim como, possíveis estratégias para a sua demonstração" (Tall, 2001, p. 5), relativamente ao segundo tipo de abordagem possível, esta foca-se essencialmente nas "definições, recorrendo a deduções formais para a construção de teoremas eliminando desta forma qualquer tipo de noção intuitiva" (Tall, 2001, p. 5). Pinto (2001) citado em (Tall, 2001, p. 7) refere que ambas as abordagens "são passíveis de promover com sucesso o desenvolvimento de teorias formais", ou seja, dependendo do contexto pode-se dar preferência a um tipo de abordagem em detrimento da outra, por exemplo, recorre-se com mais frequência a uma *abordagem natural* quando se encontram envolvidos conceitos da Geometria onde, através das imagens mentais construídas, se pode aferir, a demonstração de teoremas.

Assim sendo, a construção de um *conceito formal* envolve *imagens formais* e *imagens informais* relativas a esse conceito. As *imagens informais* são referentes ao *conceito imagem* que os alunos desenvolvem antes de terem tido contato com qualquer definição, teorema ou axioma, no que diz respeito às *imagens formais*, estas consistem na "parte do *conceito imagem* que é formalmente deduzido a partir dos axiomas" (Tall, 2001, p. 7). Ou seja, na formação de um *conceito formal* considera-se que é praticamente impossível que o mesmo advenha exclusivamente de deduções formais, uma vez que, a mente humana é única e desta forma é inevitável o estabelecimento de conexões entre ambos os tipos de *imagens* (*formal* e *informal*), ficando então evidente, que o processo de formação dos conceitos matemáticos assenta numa ação de reciprocidade entre o *conceito definição* e o *conceito imagem*.

De seguida apresento um esquema que ilustra os intervenientes no processo de construção de uma teoria formal.

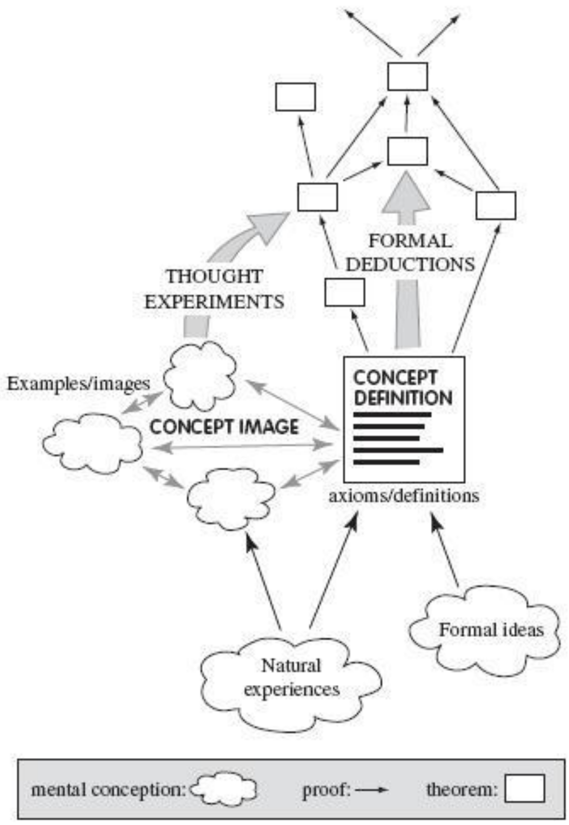


Figura 2.6: Intervenientes na construção de uma teoria formal (Tall, 2001, p. 5)

O conceito de derivada é passível de ser definido de várias maneiras, porém, aquela a que se recorre frequentemente na disciplina de Cálculo, é a seguinte: "o gradiente de uma função $f(x)$ no ponto x_0 corresponde ao declive da reta tangente ao gráfico da função *f* no ponto $(x_0, f(x_0))$" (Giraldo et al., 2003, p. 2). Estudos realizados por Vinner (1983) e Tall (1989) citados em Giraldo et al. (2003, p. 2) sobre este conceito revelaram que o *conceito imagem* que os alunos possuíam relativamente à noção de tangência se encontrava essencialmente associado a problemas do âmbito da geometria, considerando para o efeito que a reta tangente a uma curva apenas a "toca" num único ponto em oposição à ideia de reta secante que a "corta" em dois pontos. Ora esta ideia que os alunos trazem da Geometria "conduz a um estreitamento do *conceito imagem* de tangente que não é consistente com a noção de tangência do Cálculo Infinitesimal"(Giraldo et al., 2003, p.2).

Em estudos posteriores Tall (2000) recorre à noção de *local straightness* para explicar o conceito de derivada. Esta noção baseia-se no fato de o gráfico “de uma função diferenciável “parecer reto” quando é ampliado várias vezes num computador” (Giraldo, 2003, p. 3). Em concreto, pode-se dizer que *local straightness* consiste na “percepção primitiva que se cria da imagem do gráfico, e que se encontra relacionada com a forma como um indivíduo olha para o gráfico e compreende as variações no gradiente” (Giraldo et al.,2003, p. 3). Neste sentido, Tall (2000) integra as tecnologias como forma de promover a formação do *conceito imagem* pelos alunos relativamente ao conceito de derivada, porém, adverte para a existência de situações em que “uma representação computacional é aparentemente contraditória com a formulação teórica associada”, a que Giraldo (2001) citado em (Giraldo et al. 2002, p.3) define por *conflito teórico-computacional*. Como exemplo de um *conflito teórico- computacional* tem-se a curva $y = x^2$ na vizinhança do ponto $x = 1$. Tratando-se de uma função diferenciável, seria de esperar que no processo de sucessivas ampliações esta se assemelhasse a uma reta, contudo o que se verificou recorrendo ao programa *Maple*, foi que devido a erros de aritmética ou limitações subjacentes aos algoritmos utilizados para valores de ordem igual ou inferior a 10^{-6}, a função adquiria um aspeto poligonal (Giraldo et al., 2003, p.4). Neste sentido, Carvalho et al. (2003,p. 6) defendem a posição que se os *conflitos teórico-computacionais* forem trabalhados ao invés de evitados “o desempenho cognitivo inerente a cada caraterística na forma de representação podem sofrer uma reversão positiva: elas podem contribuir não para o estreitamento, mas sim para o enriquecimento do *conceito imagem* dos alunos”.

De uma forma geral, as noções de *conceito imagem* e *conceito definição* de Tall e Vinner (1981), tornam-se assim importantes ferramentas neste estudo, uma vez que, nos permite analisar como é que o conceito de derivada de uma função se forma na mente do aluno e que dificuldades podem advir da sua construção e formalização.

2.2.2. Uso de Tecnologias na Educação Matemática

Segundo a NCTM (2000, p. 335), o "principal objetivo da Matemática no Ensino Secundário é dotar os alunos com conhecimento e ferramentas que os possibilitem formular, conjeturar, e resolver problemas para além daqueles que foram estudados". Neste sentido deve ser proporcionado aos alunos experiências de aprendizagens ricas e inovadoras que conduzam a aprendizagens significativas nos mesmos, pelo que as tecnologias têm vindo a desempenhar um papel essencial no auxílio à compreensão de determinados conceitos matemáticos pelos alunos.

Segundo Silva et al. (2001, p. 22), "a dimensão gráfica constitui uma componente incontornável do trabalho matemático" justificando-se o seu uso, pelas oportunidades que estas podem proporcionar. Corroborando a mesma ideia, Kendal (2001, p. 15) citando Dubinsky e Tall (1991) refere que a título de exemplo que os computadores "podem atribuir significado às ideias "abstratas" através da representação de objetos "concretos" como (símbolos, números e figuras) que são passíveis de ser manipulados através da interatividade do *software* fazendo com que haja uma maior probabilidade de compreensão de determinado conceito".

Assim sendo, a integração de tecnologias nas práticas pedagógicas conferem dinamismo na investigação/exploração de diversas situações-problema onde por via da representação visual permite que os alunos construam intuitivamente e gradualmente um conceito matemático até à sua formalização. Desta forma, uma prática que contemple tecnologias admite os seguintes pressupostos:

"exploração → conjetura → tentativa de demonstração → conclusão e aplicação"

contrariamente às abordagens ditas tradicionais que se centram:

"definição → teorema → demonstração → corolário (aplicações)"

(Pereira, 2009, p. 38)

Contudo, salienta-se a importância de se proporcionar neste tipo práticas pedagógicas (que integram tecnologias) um espaço para o confronto com resultados teóricos visando desta forma evitar potenciais conflitos cognitivos no aluno durante a aprendizagem de determinado conceito matemático.

2.3. Perspetiva Ontosemiótica na Educação Matemática

Neste tópico pretendo apresentar os níveis de análise didática e algumas das suas ferramentas, que compõem o enfoque ontosemiótico, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Neste sentido, será dado ênfase às configurações de objetos e processos matemáticos e didáticos, assim como, às componentes de adequação didática. No culminar do mesmo, apresento uma breve reflexão sobre o estudo da derivada realizado por Font, onde teve em linha de conta esta mesma perspetiva.

2.3.1. Níveis de Análise Didática

O Enfoque Ontosemiótico foi desenvolvido por Godino e seus colaboradores, numa tentativa de perceber os mecanismos que condicionam o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, e numa tentativa, de procura de ferramentas que visem uma melhoria desses mesmos mecanismos. Assim sendo, pode-se dizer que o Enfoque Ontosemiótico visa articular diferentes pontos de vista e noções teóricas sobre o conhecimento matemático e o seu ensino e aprendizagem.

Segundo Godino (2009, p.20), este enfoque resulta de uma combinação de vários outros modelos, sendo estes os seguintes:

a) “Um modelo epistemológico sobre a matemática, baseado em pressupostos antropológicos/socioculturais
b) Um modelo de cognição matemática sobre bases semióticas
c) Um modelo instrucional sobre as bases sócio-construtivistas
d) Um modelo sistémico-ecológico que relaciona as dimensões anteriores entre si com fundo biológico, material e sociocultural, em que tem lugar a atividade de estudo e comunicação matemática.”

As noções teóricas associadas ao enfoque ontosemiótico devem ser encaradas como ferramentas de análise e reflexão sobre os processos de ensino e aprendizagem, e podem “ser utilizadas pelos próprios professores para investigar a sua prática” (Godino, 2009, p. 20).

Este enfoque contempla vários níveis de análise que permitem estabelecer decisões concretas sobre o processo de instrução. Assim sendo, os seus níveis de análise são os seguintes:

- “Práticas matemáticas e didáticas” onde é realizada uma descrição das ações que visam a resolução das tarefas matemáticas propostas aos alunos no sentido de contextualizar os conteúdos e promover as aprendizagens. Neste processo, e embora de uma forma geral, delineia-se um esquema de atuação do próprio professor e dos alunos
- “Configuração de objetos e processos (matemáticos e didáticos)” onde se realiza uma descrição dos objetos que intervêm e emergem da realização das práticas. Este nível de análise tem como finalidade descrever a complexidade de objetos e significados provenientes das práticas matemáticas e didáticas como fator explicativo da sua realização e progressão na matemática
- “Normas e metanormas”, são referentes à identificação de conjuntos de regras, hábitos, normas que condicionam um processo de estudo e afetam cada faceta e as suas interações
- “Adequação” que consiste na identificação das melhorias do processo de estudo que aumentem a adequação didática

Neste sentido, os vários sistemas de objetos e relações entre eles, que este enfoque engloba torna possível analisar e compreender a diferentes níveis de profundidade os vários fatores intervenientes no processo de ensino e aprendizagem da matemática (Godino, 2009, p. 20).

2.3.2. Ferramentas de Análise Didática

✓ **Objetos que intervêm e imergem dos sistemas de práticas**

Na prática matemática[3] intervêm vários tipos de objetos (símbolos, gráficos, definições, proposições, etc.) que são possíveis de ser representados sob as mais variadas formas, isto é, escrita, oral, etc.. Os objetos que emergem dos sistemas de práticas podem ser considerados como "objetos institucionais" quando partilhados por uma instituição ou "objetos pessoais" quando correspondem a uma pessoa (Godino et al., 2008, p.13).

Com o intuito de se realizar uma análise refinada da atividade matemática, (Godino et al, 2008, p. 14), referem seis tipos de entidades primárias a ter em conta:

- a *linguagem* que compreendem os termos, expressões, notações, gráficos, etc., nas suas mais variadas formas de registos, isto é, escrita, oral, gestual, etc.
- as *situações – problemas*, que consiste nas aplicações extra-matemáticas, exercícios entre outras
- os *conceitos-definição* que são introduzidos mediantes definições ou descrições, por exemplo, ponto, reta, número, média, função, etc.
- os *procedimentos*, que são referentes aos algoritmos , operações, técnicas de cálculo, etc.
- os *argumentos*, referentes aos enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos, dedutivos ou de outro tipo, etc.

Estes objetos encontram-se relacionados entre si constituindo configurações que definem redes de objetos que intervêm e emergem das práticas e suas relações (Godino et al., 2008, p. 15). Estas configurações podem denominar-se por epistémicas, se forem provenientes de uma rede de objetos institucionais, ou cognitivas, quando relativas a uma rede de objetos pessoais. Ou seja, por outras palavras pode-se dizer que a configuração epistémica corresponde ao conjunto de objetos envolvidos na resolução de tarefas. De seguida apresento um esquema que ilustra a

[3] Entende-se por *prática matemática* a atuação ou expressão (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguém para resolver problemas matemáticos, comunicar a outros a solução obtida, validá-la ou generalizá-la a outros contextos e problemas (Godino et al., 2008, p. 11).

forma como os seis objetos se articulam entre si, conduzindo à formação de configurações epistémicas:

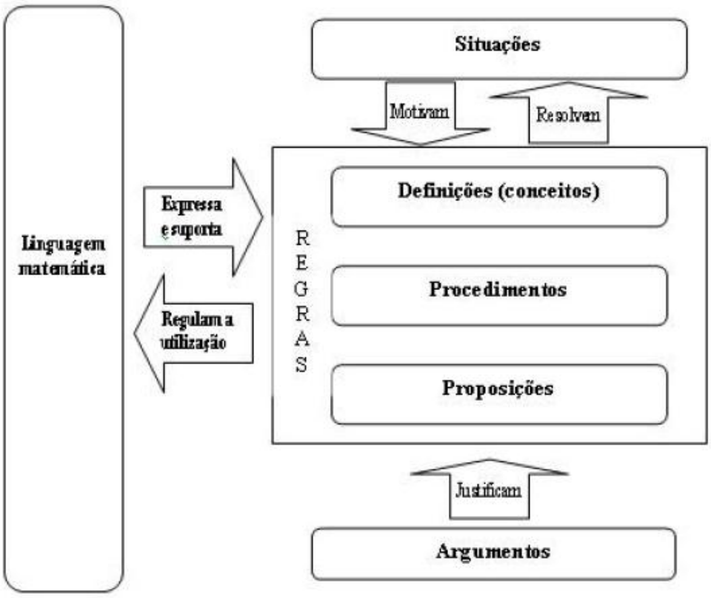


Figura 2.7: Componentes e relações de uma configuração epistémica (Neto, 2009, p. 28)

✓ **Componentes de Adequação Didática**

A noção de adequação didática, foi introduzida no enfoque ontosemiótico como um nível de análise que permite passar de uma " didática descritiva - explicativa a uma didática normativa, isto é, a uma didática que se orienta para uma intervenção efetiva em sala de aula" (Godino, 2011, p.5). A adequação didática de uma experiência de ensino compreende uma articulação coerente e sistémica de seis componentes, sendo estas as seguintes:

Adequação epistémica: é referente ao "grau de representatividade dos significados institucionais implementados (ou pretendidos), relativamente ao significado de referência"(p. 5). Este significado de referência é relativo ao "nível educativo em que tem lugar o processo de estudo e deverá ser elaborado tendo em conta os diversos tipos de problemas e contextos de uso do conteúdo objeto de ensino, assim como, as práticas operativas e discursivas requeridas" (p. 8). A seleção de tarefas ricas revela ser um elemento chave para se atingir uma alta adequação epistémica. Assim sendo, este tipo de tarefas deve contemplar uma diversidade de representações ou de expressões, por forma a proporcionar aos alunos diversas formas de as abordar levando-os a interpretar, conjeturar, generalizar e justificar raciocínios. Um outro fator a ter em conta, relativamente às tarefas a serem selecionadas, diz respeito, às conexões matemáticas, isto, é, “os blocos de conteúdo matemático (numeração e cálculo, álgebra, geometria,…) não devem ser abordados como entidades separadas” (p. 9) estas devem interelacionar os conceitos, ou seja, numa resolução de problemas com um contexto rico encontram-se em jogo uma grande variedade de ferramentas e compreensões matemáticas subjacentes.

Adequação cognitiva: expressa o “grau em que os significados pretendidos/implementados estão na zona de desenvolvimento potencial dos alunos, assim como, com a proximidade dos significados pessoais alcançados aos significados pretendidos/implementados” (p.5). No sentido de atingir esta adequação, os alunos devem apropriar-se dos significados institucionais pretendidos por via da “participação na comunidade de práticas gerada na aula”(p.10) promovendo uma maior aproximação entre os significados pessoais iniciais dos alunos e os significados institucionais planificados.

Adequação interacional: refere-se ao “grau como os modos de interação permitem identificar e resolver conflitos de significado, favorecendo a autonomia na aprendizagem e o desenvolvimento de competências comunicativas ” (p. 11). Os indicadores desta componente de adequação didática centram-se nas interações entre professor-aluno e aluno-aluno. Neste sentido, o autor salienta a importância do estabelecimento de diálogos entre os alunos e os alunos e o professor, como forma de conduzir a níveis mais elevados de compreensão, onde através das ferramentas e estratégias que os mesmos vão desenvolvendo e partilhando com os outros, os leva a adotar um papel ativo na sua aprendizagem. Reforçando esta mesma ideia, (Van den Heuvel – Panhuizen & Wijers, 2005, p. 290) citado em Godino (2011, p. 12), referem que a “negociação explícita, a intervenção, a discussão, a cooperação e a avaliação são elementos essenciais num processo de aprendizagem construtivo em que os métodos informais do aluno são usados como plataforma para alcançar os métodos formais. Nesta instrução interativa, os alunos são estimulados a explicar, justificar, concordar e discordar, questionar alternativas e refletir”.

Adequação mediacional: refere-se ao "grau de disponibilidade e apropriação dos recursos materiais e temporais necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem" (p. 13). Segundo a NCTM (2000) citado em Godino (2011, p. 13), "a tecnologia é essencial no ensino e aprendizagem da matemática. Este meio pode influenciar positivamente o processo de ensino e aprendizagem, ajudando mesmo na compreensão dos alunos e na estimulação do seu interesse", e neste sentido, estas podem ser potencializadoras de uma maior adequação mediacional do que os recursos ditos normais.

Adequação afetiva: refere-se ao "grau de implicação, interesse e motivação" (p.10) dos alunos num processo de ensino. A adequação afetiva pode estar relacionada com fatores dependentes da instituição ou relativos ao próprio aluno e sua situação escolar prévia. Contudo, é de salientar que, terão alta adequação afetiva, por exemplo, o desenvolvimento de situações-problema que sejam de interesse para o aluno.

Adequação ecológica: refere-se ao "grau em que um plano ou ação formativa para aprender Matemática é adequado dentro do contexto em que se utiliza" (p. 14).

Na figura que se apresenta abaixo, faz-se uma síntese das componentes inerentes à adequação didática:

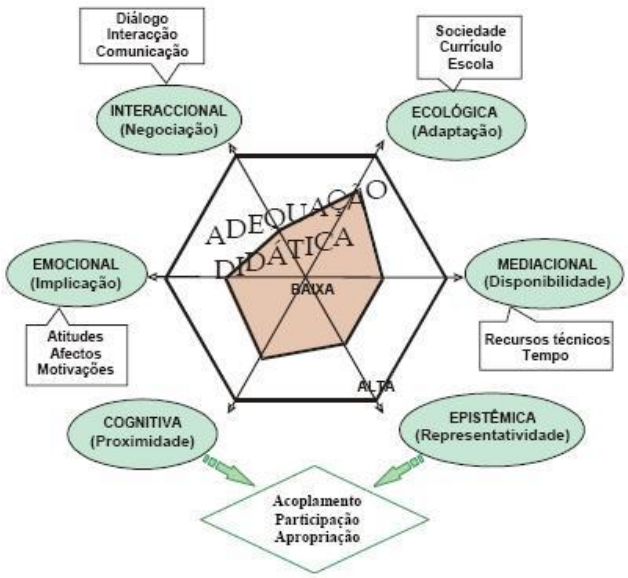


Figura 2.8: Componentes da adequação didática (Neto, 2009, p. 39)

De uma forma geral, a interação de todas estas componentes incitam uma extraordinária complexidade inerente aos processos de ensino e aprendizagem, como se pode verificar através da análise da figura, onde o hexágono regular faz corresponder a uma adequação de um "processo de ensino pretendido ou programado" onde lhe estão intrínsecas um máximo de adequações parcelares, e ao hexágono irregular inscrito, faz corresponder as "adequações efetivamente atingidas na implementação de um processo de ensino e aprendizagem" (Godino et al., 2008, p. 38). Contudo saliento a importância das mesmas, como forma de guia para o desenho, implementação e avaliação dos planos de formação dos professores e para reflexão dos próprios sobre a sua atuação prática.

Font e o Conceito de Derivada

Vicenç Font na sua tese doutoral baseando-se no marco teórico do enfoque ontosemiótico, realizou o estudo sobre o ensino e aprendizagem do conceito de derivada com alunos do Ensino Secundário com idades compreendidas entre os 16 e 17 anos de idade. O processo levado a cabo por Font para o estudo da derivada resulta da combinação de três formas diferentes de ensinar o respetivo conceito. Assim sendo, o investigador partiu de um caso particular, em concreto da função $f(x) = x^2$ e tomou-o como caso genérico para chegar ao seguinte resultado "dada uma função $f(x)$ pode-se considerar uma nova função $f'(x)$ que a cada valor da abcissa faz corresponder o valor da derivada nesse ponto (se existir)" (Font et al., 2005, p. 162). Numa fase posterior recorreu à interpretação geométrica de derivada de uma função num ponto onde concluí que a função derivada de $f(x) = x^2$ é $f'(x) = 2x$ e por fim, recorre "à interpretação de derivada de uma função num ponto como taxa de variação instantânea para definir a função derivada como um limite" (Font et al., 2005, p. 162). As principais conclusões decorrentes do seu estudo foram as seguintes:

- o significado pessoal dos objetos *função*, *variação de uma função*, *declive*, *taxa média de variação*, *velocidade* entre outros, que se admitiam ter sido previamente estudados pelos alunos, manifestaram-se insuficientes. A forma de se saber se um aluno adquiriu um bom significado pessoal do objeto derivada consiste no mesmo conseguir um bom significado pessoal dos objetos acima mencionados (Godino et al., 2008, p. 32);

- “a definição de função derivada vista como limite das taxas médias de variação apresenta uma grande complexidade semiótica” (Godino et al., 2008, p. 32);

- -os *conflitos semióticos*[4]potenciais e a necessidade de atividades que partam dos conhecimentos prévios dos alunos, levam a admitir significados pretendidos que se concretizam através das unidades didáticas e cuja implementação requer bastantes recursos temporais, mas que muitas das vezes, por limitações ao nível dos materiais disponíveis não se tornam exequíveis, assim como, por outras limitações temporais reais (Godino et al., 2008, p. 32);

- “o fato de ter desenhado um *significado pretendido*[5]que incorporavam práticas que permitiam determinar a expressão simbólica das funções derivadas por via de representação gráfica de funções $f(x)$ e $f'(x)$ modificou os significados pessoais que os alunos possuíam do objeto “funções elementares”. Ao finalizar o processo de estudo, o significado pessoal que a maioria dos alunos possuía derivado dessa prática, permitia-lhes obter as expressões simbólicas de funções elementares a partir dos seus gráficos. Estas práticas não formavam parte do seu significado de objeto pessoal “funções elementares” antes do processo de instrução, nem tinham sido explicitamente contempladas no desenho prévio do significado pretendido” (Godino et al., 2008, p. 32).

[4] Entende-se por *conflito semiótico*, qualquer disparidade ou discordância entre os significados atribuídos a uma expressão por dois sujeitos (pessoas ou instituições). Se a disparidade ocorre entre significados institucionais, fala-se de conflitos semióticos do tipo epistémico, se a disparidade ocorre ao nível das práticas que forma o significado pessoal de um mesmo sujeito, designa-se por, conflitos semióticos do tipo cognitivo. Quando a disparidade ocorre entre as práticas (discursivas e operativas) de dois sujeitos diferentes em interação comunicativa (aluno-aluno ou professor-aluno) designa-se por, conflitos semióticos interacionais. (Neto, 2009, p. 36)

[5] Entende-se por *significado pretendido*, o sistema de práticas incluídas na planificação do processo de estudo. (Godino et al., 2008, p. 12)

Capítulo 3 - Unidade Didática: *Taxa de Variação e Derivada*

Neste capítulo começo por fazer referência à natureza das tarefas que estão na base desta planificação, assim como, apresento a planificação da unidade didática *Taxa de Variação e Derivada* relativamente ao conceito matemático derivada de acordo com os objetivos, conteúdos programáticos, indicações metodológicas e recomendações constantes no Programa de Matemática A do Ensino Secundário. No culminar do mesmo, apresento a configuração epistémica da tarefa e da questão alvo de análise neste estudo.

3.1. Natureza das Tarefas

Na elaboração de uma unidade didática, a diversidade de tarefas e de experiências de aprendizagem é uma das exigências com que o professor se depara. Segundo Stein e Smith (1998, p. 1), uma tarefa matemática consiste num "segmento da actividade em sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática " e que pode contemplar vários "problemas relacionados ou um trabalho prolongado" (p.1), pelo que, na sua seleção o papel do professor se revela fundamental, já que ao "analisar e adaptar um determinado problema, ao antecipar ideias matemáticas que dele possam emergir e as próprias questões dos alunos, os professores podem decidir se determinados problemas poderão ou não ajudar a sua turma a atingir os objectivos propostos"(NCTM, 2008, p. 58).

Segundo Ponte (2005), as tarefas atendem a duas dimensões consideradas fundamentais, sendo estas, o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. A primeira relaciona-se com a "percepção da dificuldade de uma questão […] e varia naturalmente, entre os pólos de desafio "reduzido" e "elevado", a segunda, é relativa ao grau de estrutura, variando entre os pólos "aberto" e "fechado"" (Ponte, 2005, p. 7). Neste sentido, denomina-se por *exercício* uma tarefa que é fechada e admite um grau de desafio reduzido; *problema* uma tarefa fechada e com um grau de desafio elevado; *investigação* uma tarefa aberta e de elevado desafio e por fim, a *tarefa de exploração* que é uma tarefa aberta mas com um grau de desafio reduzido (Ponte, 2005, p. 8). Apresento de seguida uma figura que ilustra a situação anteriormente descrita.

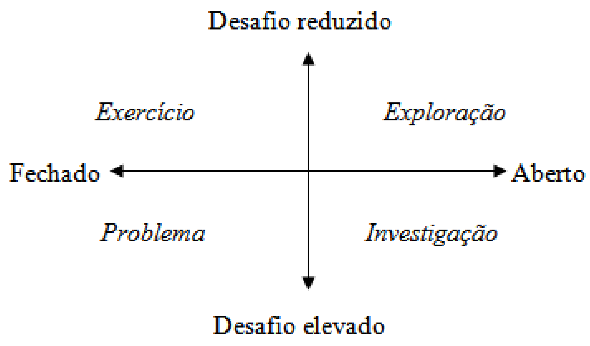


Figura 3.1: Tipos de tarefas quanto ao grau de desafio e de estrutura (Ponte, 2005, p. 8)

Tendo presente as dimensões referidas anteriormente, subjacente às mesmas, encontram-se mais duas outras dimensões, sendo estas, a duração e o contexto das tarefas. Assim sendo, uma tarefa pode apresentar-se com um tempo de duração curto, médio ou longo, onde os *exercícios* se manifestam com uma duração relativamente curta, devido ao grau de desafio e de estrutura subjacente ao mesmo, com uma duração média encontram-se os *problemas*, as *tarefas de investigação* e as *tarefas de exploração*, e como tarefas de longa duração, encontram-se os *projetos*. Relativamente ao contexto, Ponte (2005, p. 11) defende que "os pólos aqui são as tarefas enquadradas num contexto da realidade e as tarefas formuladas em termos puramente matemáticos", porém, Skovsmose (2000) citado em Ponte (2005, p.11), refere a "existência de um terceiro contexto, de algum modo intermédio, que designa por "semi-realidade"", onde embora estejam patentes situações reais na tarefa, a maior parte das propriedades reais das situações não são tidas em conta, acabando por ser um contexto quase tão abstracto como o contexto da matemática pura.

De uma forma geral, a natureza das tarefas constituem um elemento marcante na estratégia de ensino e aprendizagem que se pretende adotar, mas torna-se também igualmente importante, promover momentos onde os alunos possam "reflectir sobre a sua compreensão da matemática ajudando-os a fazer conexões e a clarificar os conceitos matemáticos" (Ponte et al., 2007, p. 45). Neste sentido, a nossa unidade didática assenta em tarefas de natureza exploratória e outras de "aplicação" (exercícios e problemas), e procurou-se em ambas inserir momentos de discussão visto se revelarem fundamentais "para a negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento" (Ponte, 2005, p.16).

3.2. Planificação da Unidade Didática

Neste subcapítulo apresentam-se os princípios gerais, assim como, a planificação das aulas que constituem a unidade didática *Taxa de Variação e Derivada*.

3.2.1. Princípios Gerais

A unidade didática *Taxa de Variação e Derivada* encontra-se subordinada ao tema "Introdução ao Cálculo Diferencial I. Funções racionais e com radicais. Taxa de Variação e Derivada." do Programa de Matemática A do 11.º ano de escolaridade, homologado em 2002 e atualmente em vigor. A sua planificação atendeu essencialmente aos objetivos, conteúdos programáticos, indicações metodológicas e recomendações constantes no Programa de Matemática A, assim como, às orientações curriculares sugeridas na Brochura de "Funções" do 11.º ano de escolaridade.

Segundo Silva et al. (2001, p. 10), as sugestões de indicações metodológicas a serem adotadas, admitem os seguintes pressupostos: **i)** "os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas", **ii)** "os conceitos são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização", **iii)** "maior ligação da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com questões abordadas noutras disciplinas, ajudando a enquadrar o conhecimento numa perspectiva histórico-cultural".

Neste sentido, na elaboração desta unidade didática procurou-se construir tarefas que visassem contribuir de forma significativa "para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o aluno a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação" (Silva et al., 2001, p.10), assim como, definir de forma clara a estratégia de intervenção pedagógica do próprio professor, contemplando-se momentos de dinamização, de formulação de questões e momentos de discussão e síntese.

Assim sendo, a metodologia adotada na unidade didática *Taxa de Variação e* Derivada assenta sobre tarefas de natureza exploratória permitindo desta forma aos alunos intuir, conjeturar, experimentar e provar, e posteriormente, foram promovidos espaços de reflexão e discussão em turma dos resultados obtidos pelos mesmos, e consequente, síntese e formalização dos conceitos, seguidos de tarefas de aplicação desses mesmos conceitos.

Visando o presente estudo identificar as dificuldades sentidas pelos alunos durante a aprendizagem do conceito de derivada de uma função num ponto e função derivada, assim como, averiguar em que medida o recurso ao *applet* promoveu a aprendizagem do conceito de derivada de uma função num ponto, as indicações metodológicas no Programa de Matemática A sugerem que se deverá privilegiar a "interpretação geométrica para a taxa de média de variação e para a derivada" (Silva et al., 2002, p. 6) recorrendo desta forma à noção intuitiva de limite para a formalização do conceito derivada de uma função num ponto, assim como, salientam que se pode tornar vantajoso a exploração de exemplos concretos relativos a outras disciplinas que permitam um posterior aprofundamento na disciplina de Matemática (Silva et al., 2002, p. 5).

A integração das tecnologias, revela-se assim fundamental no processo de visualização, pelo que se recorreu a um *applet* e à calculadora gráfica para a interpretação do conceito matemático derivada. Reforçando esta mesma ideia a NCTM (2008),refere:

> "o envolvimento dos alunos com ideias matemáticas abstractas, incluindo as suas próprias, pode ser fomentado através da utilização da tecnologia. A tecnologia enriquece a extensão e a qualidade das investigações, ao fornecer um meio de visualizar noções matemáticas sob múltiplas perspectivas. " (p. 28)

De salientar que, os alunos devem contudo desenvolver um espírito crítico face aos resultados apresentados pelas mesmas, ou seja, devem confrontar os resultados até então obtidos com os conhecimentos teóricos (Silva et al., 2001, p.16), tendo-se contemplado a sua integração na elaboração da unidade didática. Outro fator que se procurou ter em conta, foi a possibilidade de estabelecer uma conexão dos respetivos conceitos matemáticos em estudo com outras áreas do saber, assim sendo, como os alunos desta turma optaram pela disciplina de Física, decidiu-se recorrer a exemplos desta disciplina para se abordar matematicamente os conceitos. Mais, "a informação sobre a génese e o percurso de um conceito ao longo dos tempos e a sua relação com o progresso da humanidade pode fomentar, ou aumentar, o interesse pelo tema em estudo, ao mesmo tempo que constitui uma fonte de cultura" (Silva et al., 2001, p. 12), pelo que de forma sucinta, se faz a abordagem do conceito de derivada numa das aulas da unidade didática.

De uma forma geral, a formalização dos conceitos derivada de uma função num ponto e função derivada é realizada com base em argumentos geométricos, assim como, o estudo do sentido de variação e extremos de uma função. Nesta unidade didática também se prevê que os alunos deduzam a expressão da derivada de uma função afim, polinomial do 2.º e do 3.º grau e da função racional do tipo $\frac{k}{x}$.

3.2.2. Planificação das Aulas

A unidade didática *Taxa de Variação e Derivada*, compreende oito aulas com uma duração de noventa minutos cada, onde foram elaboradas para o efeito oito tarefas como forma de suporte ao desenvolvimento das aulas, assim como, se manteve uma relação estreita com o manual do aluno. A modalidade de trabalho que se adotou foi a de trabalho a pares. Este percurso apresenta os objetivos de cada aula, bem como os objetivos inerentes a cada questão que compõe as tarefas. A sua planificação pode ser consultada em apenso (**Anexo 1**).

Neste sentido, a primeira aula da unidade didática intitula-se por "Taxa média de variação. Derivada num ponto – Interpretação geométrica" (**Anexo 2**) e tal como o tópico sugere, refere-se à interpretação geométrica do conceito derivada de uma função num ponto, recorrendo para o efeito a um *applet*. Assim sendo, a mesma contempla uma única tarefa, que atende a duas fases de resolução. Na primeira fase, pretende-se que o aluno construa de forma gradual e intuitiva a noção de taxa média de variação, diz respeito, à questão 1 do enunciado da tarefa. Esta primeira fase da tarefa pressupõe uma duração de resolução de dez minutos e cinco minutos para discussão dos resultados obtidos e respetivas conclusões. Na segunda fase, através da exploração do *applet* disponível no endereço:
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Derivada_de_una_funcion/Derivada_de_una_funcion.htm pretende-se que o aluno conclua que a taxa média de variação num intervalo $[a, a+h]$ corresponde ao declive da reta secante ao gráfico da função nos pontos de abcissa a e $a+h$ e que conjeture que os declives das retas secantes que passam pelos pontos $(a, f(a))$e $(a+h, f(a+h))$ tendem para o declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa a, quando o incremento h tende para zero. Esta segunda fase corresponde à questão 2 do enunciado da tarefa, e estimou-se como tempo de resolução cerca de trinta minutos sendo os restantes quinze minutos, destinados à discussão em turma dos resultados obtidos e formalização do conceito derivada de uma função num ponto.

A segunda aula da unidade didática intitula-se por "Taxa média de variação. Derivada de uma função num ponto" (**Anexo 3**) e visa a aplicação do conceito derivada de uma função num ponto. Assim sendo, a tarefa engloba cinco questões: a questão 1, visa relacionar os conceitos de taxa média de variação, taxa de variação, declive da reta tangente com conceitos da Geometria, declive de uma reta dados dois pontos e vetor diretor da reta; a questão 2, pretende relacionar a velocidade instantânea (noção da Física) com a derivada da função num ponto (noção da Matemática), partindo de um contexto real; a questão 3, visa aplicar a definição de derivada de uma função num ponto para encontrar o declive da reta tangente a esse ponto e posteriormente, relacionar conceitos da Geometria e escrever a equação da reta; as questões 4 e 5 visam aplicar a definição de derivada de uma função num ponto, tendo em conta o contexto do problema. Os momentos de discussão e apresentação de resultados são feitos no final de cada questão.

A terceira aula da unidade didática intitula-se por "Derivada de uma função num ponto – interpretação geométrica" (**Anexo 4**) e pretende por via da interpretação geométrica, que os alunos afiram o valor da derivada de uma função num ponto, assim como, que identifiquem se uma função admite derivada num determinado ponto. Assim sendo, iniciou-se a aula com a correção do trabalho de casa, exercícios referentes ao manual do aluno, e seguidamente prosseguiu-se para a resolução desta tarefa que contempla dois grupos, onde o primeiro é relativo a questões de escolha múltipla e o segundo, a questões de desenvolvimento. A referir que, em cada grupo existem duas questões. A questão 1 do Grupo I, visa através da interpretação geométrica, aferir sobre as derivadas da função em determinados pontos; a questão 2 do Grupo I, visa relacionar conceitos de geometria, nomeadamente a perpendicularidade entre retas e descobrir qual o valor da derivada da função no ponto pedido; a questão 1 do Grupo II, visa através da interpretação geométrica, que o aluno reconheça em que intervalos a função admite derivada positiva, negativa ou nula, assim como, averigúe se, para todos os pontos do domínio, a função admite derivada; a questão 2 do Grupo II, visa que o aluno averigúe através das representações gráficas, a existência de derivada das funções num determinado ponto para que reconheça que existem funções que não são diferenciáveis num determinado ponto. Com o culminar da tarefa, prevê-se uma abordagem histórica do conceito de derivada, recorrendo para o efeito, a um PowerPoint. Os momentos de discussão de resultados e síntese criados foram relativos ao final do primeiro grupo e no segundo grupo, a estratégia adotada foi diferente, tendo-se dada a discussão após a realização de cada questão.

A quarta aula da unidade didática intitula-se por "Função derivada" (**Anexo 5**) e visa através de uma análise geométrica definir função derivada. Uma vez que, não se conseguiu concluir a questão 2 do Grupo II da aula anterior, esta aula iniciou com a resolução dessa mesma questão, assim como, foram apresentados os aspetos históricos relativos ao conceito de derivada. Seguidamente, passou-se para a tarefa exploratória relativa a esta aula que é constituída por três questões. A questão 1, visa que o aluno construa de forma gradual e intuitiva a noção de função derivada onde na final da mesma foi formalizado o conceito de função derivada (Capítulo 2); a questão 2, visa provar analiticamente, o resultado obtido anteriormente para a função derivada; a questão 3, visa que o aluno conheça ferramentas da calculadora gráfica, relativas à função derivada. Os momentos de discussão de resultados e respetivas sínteses, são realizados após a resolução de cada questão.

A quinta aula da unidade didática intitula-se por "Derivadas da função afim, função polinomial do 2.º e 3.º grau e função racional do tipo $\frac{k}{x}$" (**Anexo 6**) e visa deduzir a expressão da derivada da função afim, função polinomial do 2.º e 3.º grau e função racional do tipo $\frac{k}{x}$ e consequente, aplicação. Para tal, a tarefa exploratória relativa a esta aula é constituída por duas questões. A questão 1 tem como objetivo que os alunos deduzam a expressão da derivada da função afim, função polinomial do 2.º e 3.º grau e função racional do tipo $\frac{k}{x}$ (Capítulo 2), na questão 2, pretende-se que o aluno a partir das provas realizadas na questão anterior, determine a expressão das derivadas de algumas funções. Os momentos de discussão e síntese são realizados no final da resolução de cada alínea que compreende cada questão.

A sexta aula da unidade didática intitula-se por "Derivadas da função afim, função polinomial do 2.º e 3.º grau e função racional do tipo $\frac{k}{x}$ - Aplicação" (**Anexo 7**) visa determinar a expressão da derivada de algumas funções recorrendo para o efeito aos resultados provados na aula anterior. Esta tarefa divide-se em dois grupos sendo o primeiro referente a questões de escolha múltipla e o segundo, referente a questões de desenvolvimento. O Grupo I engloba assim duas questões, onde na questão 1, se pretende determinar a derivada de uma função num ponto recorrendo à derivada da função polinomial do 2.º grau deduzida na aula anterior, e a questão 2, visa determinar a expressão da função f partindo da equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 0. No fim deste grupo (Grupo I), procedeu-se a um momento de discussão dos resultados onde foi pedido aos alunos que justificassem o seu raciocínio para ter chegado àquela solução. Relativamente, ao segundo grupo (Grupo II), a questão 1, visa que o aluno determine a derivada de uma função num ponto recorrendo para o efeito à expressão da derivada da função polinomial do 2.º grau deduzida na aula anterior, assim como, que reconheça que no vértice da parábola a derivada da função é nula; a questão 2, visa determinar a derivada de uma função num ponto recorrendo à expressão da derivada da função polinomial do 3.º grau deduzida na aula anterior, com o intuito de determinar a equação da reta tangente no ponto de abcissa 2; a questão 3, pretende que os alunos relacionem os conceitos do cálculo diferencial com os conceitos geométricos para determinar as coordenadas do ponto de tangência de uma reta com o gráfico da função. O momento de discussão e síntese deu-se após ter verificado que os alunos já tinham terminado todas as questões do Grupo II. No culminar desta aula procedeu-se à correção do trabalho de casa, assim como, das alíneas pendentes da questão 2 da aula anterior.

Para a sétima aula da unidade didática foi realizada uma tarefa de índole exploratória ("Sentido de variação e extremos de uma função" (**Anexo 8**)) onde se pretende que o aluno de forma gradual relacione o sinal da função derivada num intervalo aberto com o sentido de variação da função nesse intervalo e, os zeros da derivada com os extremos da função, assim como, que estude analiticamente, a monotonia e a existência de extremos de funções polinomiais. No final da questão 1.4 foi formalizado os resultados referentes à relação entre o sinal da derivada e a monotonia da função (Capítulo 2), e na questão 1.5 após se ter formalizado os resultados relativamente ao fato de o sinal da função derivada de uma função permitir identificar os extremos relativos, máximos e mínimos, da função, quando existem, explorou-se o caso das funções $f(x) = x^3$ e $f(x) = |x|$, como (contra-) exemplos para que os alunos compreendam que há funções que têm derivada nula num ponto sem que nele haja extremo e que há funções com extremo que não têm derivada real no ponto (Capítulo 2). A questão 2, é de aplicação dos conceitos alvo de estudo nesta aula.

A oitava aula da unidade didática intitula-se por "Problemas de otimização" (**Anexo 9**) e visa aplicar o estudo da função derivada na resolução de problemas de otimização. Para o efeito, recorrer-se-á à tarefa elaborada e a problemas de otimização do manual do aluno. A estratégia que foi adotada para a resolução da tarefa, visa num primeiro momento a discussão em turma das possíveis estratégias para a resolução de cada problema e, após algum tempo que foi dado aos alunos para procederem à sua resolução, é apresentada a solução com a ajuda dos mesmos.

Com o intuito de encontrar respostas às questões de investigação inicialmente formuladas, este estudo focará a sua análise na primeira e sexta aula da unidade didática *Taxa de Variação e* Derivada. Relativamente à primeira aula, será feita uma análise integral da tarefa ”Taxa média de variação. Derivada num ponto – Interpretação geométrica” e na sexta aula, centrar-me-ei na questão 2 do Grupo I da tarefa “Derivadas da função afim, função polinomial do 2.º e 3.º grau e função racional do tipo $\frac{k}{x}$ – Aplicação”, que tem em linha de conta um raciocínio levado a cabo por um aluno da turma relativamente à resolução da questão de escolha múltipla, diferente daquela que havia sido previsto na preparação da aula. Para o efeito, e por uma questão de simplificação, a tarefa “Taxa média de variação. Derivada num ponto – Interpretação geométrica” denominaremos, a partir deste momento, por *Tarefa*, e a questão 2 do Grupo I, por *Questão 2*.

3.3. Configurações epistémicas

3.3.1. *Tarefa*: enunciado e solução

<u>*Objetivo:*</u> Na primeira fase desta tarefa, pretende-se que os alunos de forma gradual e intuitiva construam a noção de taxa média de variação. Posteriormente, e já na segunda fase da mesma, pretende-se que os alunos, através da exploração de um *applet*, concluam que a taxa média de variação num intervalo $[a, a+h]$, corresponde ao declive da reta secante ao gráfico de uma função nos pontos de abcissa a e $a+h$, assim como, que estes conjeturem que os declives das retas secantes que passam pelos pontos $\big(a, f(a)\big)$e $(a+h, f(a+h))$ tendem para o declive da reta tangente ao gráfico de uma função no ponto de abcissa a, quando o incremento h tende para zero.
<u>*Duração:*</u> 90 minutos (***1.ª fase:*** 10 min. para resolução + 5 min. para discussão; ***2.ª fase:*** 30 min. para resolução + 15 min. para discussão)

A salientar, que esta tarefa pressupõe duas fases, tal como se teve oportunidade de referir, aquando da planificação das aulas. Assim sendo, tem-se:

<u>***Enunciado:***</u>

<u>**1.ª fase:**</u>

1 - A previsão da temperatura numa estância de ski entre as 0 e as 8h de um certo dia é dada por:

$$c(t) = 0{,}5t^2 - 4t$$

onde c representa a temperatura em graus centígrados e t, o tempo decorrido em horas.

(a) Com auxilio da calculadora gráfica, esboça o gráfico $c(t)$.

(b) No contexto do problema, estuda a função quanto à monotonia e a existência de extremos relativos.

<u>**Definição:**</u> Chama-se *variação* ou *acréscimo* de uma função f no intervalo $[a, b]$ à diferença $f(b) - f(a)$.

(c) Estuda a variação da função temperatura, hora a hora, completando a seguinte tabela:

$[t_0, t]$	$c(t) - c(t_0)$
[0, 1]	
[1, 2]	
[2, 3]	
[3, 4]	
[4, 5]	
[5, 6]	
[6, 7]	
[7, 8]	

(d) Qual a variação média da temperatura no intervalo [0,6]?

<u>Definição</u>: A *taxa média de variação* de uma função f no intervalo [a, b], é dada por:

$$t.m.v._{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(e) Calcula $t.m.v_{[0,6]}$ e compara o valor com aquele que obtiveste no cálculo da variação média.

<u>2.ª fase:</u>

2 - Com o aproximar da primavera houve um aumento da temperatura. Como tal, foi preciso recorrer-se a um canhão de produção de neve artificial para assegurar o funcionamento da estância de ski. Fixando a posição e o ângulo de orientação do canhão, o percurso do jacto de neve é descrito por:

$$j(t) = -0{,}5t^2 + 5t, 0 \leq t \leq 10.$$

onde t é tempo decorrido em segundos e $j(t)$ está definido em metros.

(a) Compara a taxa média de variação nos intervalos [1, 3] e [6, 8]. Qual o significado físico dos valores obtidos?

(b) Calcula a taxa média de variação da função j em intervalos sucessivos do tipo [3,3+h], com h a tender para zero, completando a seguinte tabela.

Sugestão: No applet, define como abcissa o valor 3 e h corresponde ao "incremento".

h	1	0,5	0,2	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
$\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$									

(c) Qual o significado geométrico e físico da taxa média de variação no intervalo $[3, 3+h]$?

(d) Conjectura o valor para o qual tende a expressão $\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$, quando h tende para zero, e interpreta geométrica e fisicamente o seu significado.

(e) Explorando o applet, interpreta geometricamente o que acontece quando h se aproxima de zero por valores negativos. Que concluis?

Síntese (no enunciado):

O valor para que tende a expressão $\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$ quando h tende para zero, representa a taxa de variação de j no instante $t = 3$, também designada por ***derivada*** da função j no ponto de abcissa 3.

Definição: Chama-se derivada de uma função f em x_0 , e representa-se por $f'(x_0)$, ao número, se existir, para que tende

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

quando h tende para zero.

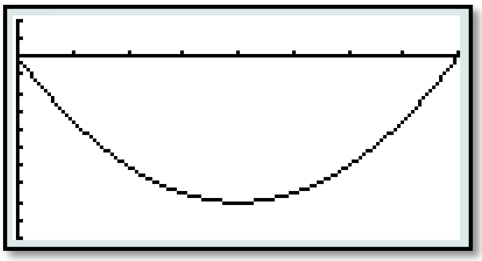
NOTA: Caso a derivada no ponto de abcissa x_0 seja finita, a função diz-se diferenciável nesse ponto.

Solução:

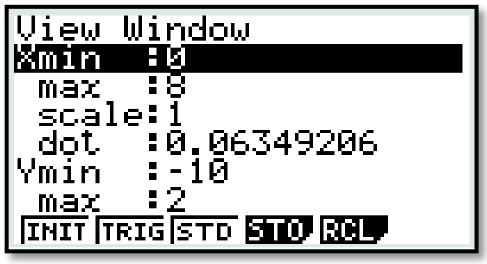
1.ª fase:

(a)

Gráfico da função $c(t)$:



Janela utilizada:



(b)

- Tabela de variação:

t	**0**		**4**		**8**
c(t)	**0**	↘	**-8**	↗	**0**

R: A temperatura sofre um decréscimo ente as 0 e as 4h e aumenta entre as 4 e as 8h, salientando que esta atinge o mínimo de -8$°C$ às 4h.

(c)

$[t_0, t]$	$c(t) - c(t_0)$
[0, 1]	$c(1) - c(0) = -3{,}5$
[1, 2]	$c(2) - c(1) = -2{,}5$
[2, 3]	$c(3) - c(2) = -1{,}5$
[3, 4]	$c(4) - c(3) = -0{,}5$
[4, 5]	$c(5) - c(4) = 0{,}5$
[5, 6]	$c(6) - c(5) = 1{,}5$
[6, 7]	$c(7) - c(6) = 2{,}5$
[7, 8]	$c(8) - c(7) = 3{,}5$

(d)

$$v.m._{[0,6]} = \frac{-3,5 + (-2,5) + (-1,5) + (-0,5) + 0.5 + 1.5}{6} = -1$$

(e)

$$t.m.v._{[0,6]} = \frac{c(6) - c(0)}{6 - 0} = -1$$

R: O valor da taxa média de variação no intervalo [0,6] é igual ao valor da variação média nesse mesmo intervalo.

<u>2.ªfase:</u>

(a) Os alunos podem recorrer a dois processos de resolução:

<u>1.º Processo</u> – aplicação da definição de taxa média de variação

$$t.m.v._{[1,3]} = \frac{j(3) - j(1)}{3 - 1} = \frac{10,5 - 4,5}{2} = 3$$

$$t.m.v._{[6,8]} = \frac{j(8) - j(6)}{8 - 6} = \frac{8 - 12}{2} = -2$$

<u>2.º Processo</u> – recorrendo ao applet

O incremento, h, do intervalo $[a, b]$ é dado pela diferença $b - a$. Tendo em conta os intervalos apresentados [1, 3] e [6, 8], o valor do incremento é 2. Desta forma o aluno deve definir em *abcisas* o valor inicial do intervalo e como *incremento* o valor 2, obtendo os valores apresentados acima.

(b) Através do applet, o aluno deverá preencher a tabela da seguinte forma:

h	1	0,5	0,2	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
$\frac{j(3+h) - j(3)}{h}$	1,500000	1,750000	1,900000	1,950000	1,995000	1,999500	1,999950	1,999995	1,9999995

(c) Os alunos, através da exploração do *applet* devem concluir que a taxa média de variação representa geometricamente o declive da reta secante ao gráfico da função nos pontos de abcissa 3 e $3 + h$ e, fisicamente, representa a velocidade média do jato de neve no intervalo $[3, 3 + h]$.

(d) Quando h tende para zero, a expressão tende para 2. Este valor representa geometricamente, o declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 3 e, fisicamente, representa a velocidade no instante $t = 3$.

(e)

h	-1	-0,5	-0,2	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	-0,00001	-0,000001
$\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$	1,500000	1,750000	1,900000	1,950000	1,995000	1,999500	1,999950	1,999995	1,9999995

Os alunos podem optar por não construir uma tabela para os valores negativos. Contudo através do *applet* devem concluir que quando h se aproxima de zero por valores negativos, os declives das retas secantes tendem para o declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 3, à semelhança do que acontece para valores positivos na alínea anterior.

Objetos e relações primárias

Linguagem:

-**Termos e expressões (verbal):** incremento ou variação, taxa média de variação, velocidade média, reta tangente a uma curva, reta(s) secante(s) a uma curva, declive de uma reta, velocidade instantânea, taxa de variação, derivada de uma função num ponto.

- **Gráfica:** esboça gráficos com recurso à calculadora gráfica ou ao *applet* para apresentar e/ou justificar raciocínios

- **Simbólica:**

- h
- $v.m._{[a,b]}$
- $t.m.v._{[a,b]} = \frac{j(b)-j(a)}{b-a}$
- $t.m.v._{[a,b]} = \frac{c(b)-c(a)}{b-a}$
- m
- v_m
- $v(t)$

- **Numérica:** regista os resultados obtidos

Exemplo:

$$t.m.v._{[0,6]} = \frac{c(6)-c(0)}{6-0} = -1$$

EXPRESSA

AJUDA

Situação - Problema: Enunciado da *Tarefa*.

Motivação

Resolução

Conceitos/Definições:

- **Prévios:** Declive de uma reta, reta tangente a uma circunferência, reta secante a uma circunferência, velocidade média, velocidade instantânea

- **Emergentes:** Taxa média de variação, Taxa de variação, Derivada de uma função num ponto

Procedimentos:

- Desenho/Construção de gráficos, recorrendo à calculadora gráfica e ao *applet* (computador)

Visualização → Raciocínio

- Construir e completar tabelas com auxílio da calculadora gráfica ou *applet*

- Aplicar a definição de taxa média de variação

- Através da exploração do *applet*, conjeturar que os declives das retas secantes que passam pelos pontos $(a, j(a))$ e $(a+h, j\,(a+h))$, dado pela expressão $\frac{j\,(a+h)\,-j(a)}{h}$, tendem para o declive da reta tangente no ponto de abcissa a, quando o incremento h tende para zero

Fundamentação

Justificação

Argumentos:

- Quando h tende para zero, a expressão $\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$ tende para o valor 2. Geometricamente, este valor representa o declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 3, e fisicamente, representa a velocidade no instante $t = 3$.

Tabela 3.1: Objetos e relações primárias da *Tarefa*

O recurso

O *applet* que serviu de suporte ao desenvolvimento desta aula, foi desenvolvido pelo Ministério de Educação, Política Social e Desporto espanhol, no âmbito do Projeto Descartes que tem como principal objetivo promover novas formas de ensino e aprendizagem da Matemática integrando as TIC em sala de aula como uma ferramenta didática. Assim sendo, o mesmo encontra-se disponível no seguinte endereço *web*:

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Derivada_de_una_funcion/Derivada_de_una_funcion.htm

Atendendo ao contexto da nossa *Tarefa*, o mesmo apresenta-se com o seguinte *display*, tal como ilustra a figura:

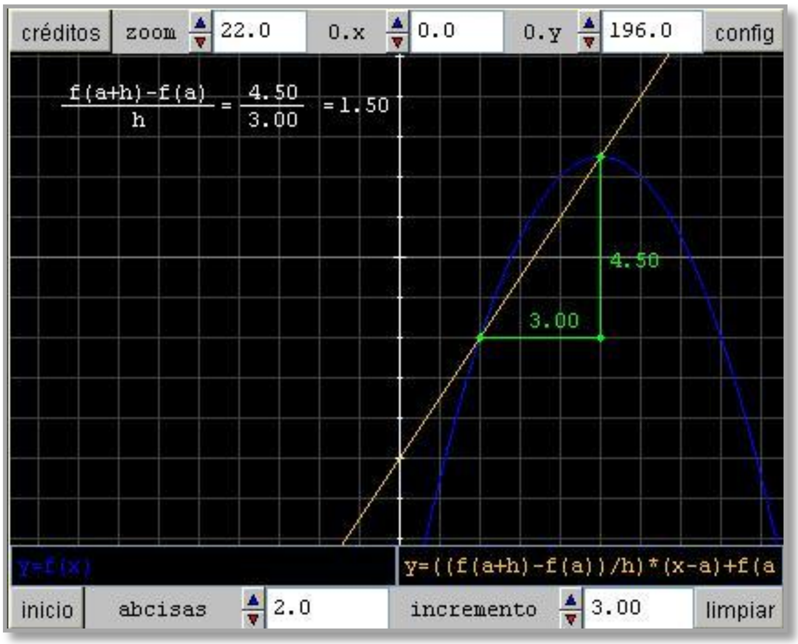


Figura 3.2: Display do *applet* após introdução da função $j(t)$

Observando com mais detalhe, verifica-se que o *applet* possuí duas linhas de comandos que se apresentam com uma cor cinzenta, onde na linha superior se encontram as opções *créditos* (relativo aos autores do *applet*), *zoom* (amplia a função), *o.x* (desloca a função na horizontal), *o.y* (desloca a função na vertical) e *config* (possibilidade de introduzir alterações no *applet* previamente definido, por exemplo, da função, cor de fundo do *applet*, etc.)e na linha inferior, encontram-se as opções *inicio* (volta ao ínicio), *abcisas* (define o valor da abcissa), *incremento* (define o valor do incremento) e *limpiar* (remove as últimas alterações introduzidas).

Para o efeito, uma vez que a função definida pelo *applet* é diferente da do contexto da nossa *Tarefa*, os alunos terão que a definir recorrendo à opção *config*, na linha de comandos superior, e posteriormente, clicar em *Auxiliares*. A seguinte figura ilustra o resultado da situação descrita:

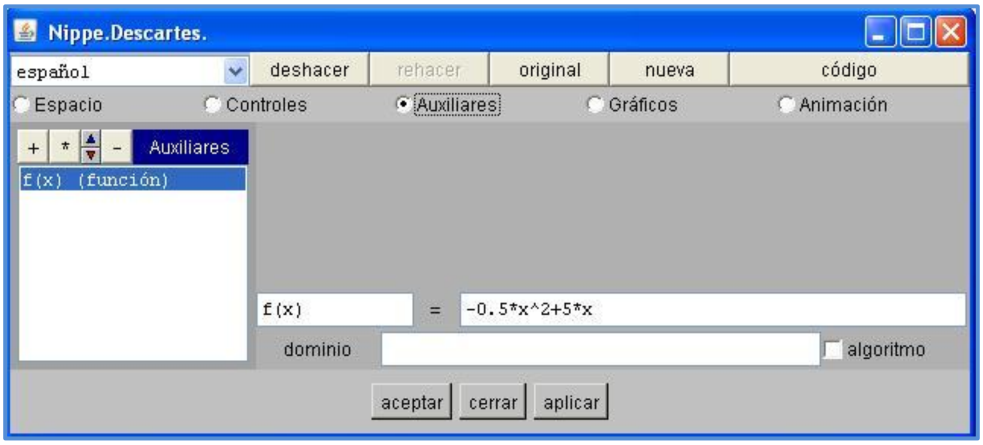


Figura 3.3: Definição da função no *applet*

Algumas observações relativas ao *applet*

- No *applet* as funções são do tipo $f(x)$, e visto não ser possível alterar o código que está na sua base de programação, a função $j(t)$ passará a ser designada no *applet* por $f(x)$.

- Na questão **2** - **(b)** da *Tarefa*, teve-se que introduzir à priori alterações ao nível do incremento para que este possuísse mais casas decimais permitindo desta forma aos alunos resolver esta questão, e numa fase posterior, que pudessem aferir o valor para a qual tenderia a expressão $\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$ à medida que h tende para zero. Para o efeito, selecionou-se a opção *config* na linha superior dos comandos e posteriormente a opção *Controles* e *h (numérico)*.

- O *applet* apenas traça retas secantes e retas tangentes, quando na realidade se tratam de semi – retas secantes (à direita e à esquerda) e semi – retas tangentes (à direita e à esquerda), do ponto onde se está a realizar o estudo da derivada. Ou seja, só existe derivada num ponto a, porque a semi – reta tangente à direita tem o mesmo declive que a semi – reta tangente à esquerda, formando assim uma única reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa a. No momento de discussão dos resultados e consequentemente, síntese, os alunos serão advertidos para esta situação.

Os tipos de dificuldades que podem vir a ser sentidas pelos alunos na manipulação do *applet*, são referentes à introdução da função, na interpretação do incremento, o idioma (originalmente, espanhol, podendo ser alterado, mas não contempla a língua portuguesa).

3.3.2. *Questão 2*: enunciado e solução

Objetivo: Pretende-se que o aluno determine a expressão da função f uma vez dada a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa zero.

Enunciado:

> **2.** A recta de equação $y = x$ é tangente ao gráfico de uma função f, no ponto de abcissa 0. Qual das expressões seguintes pode definir a função f.
>
> **(A)** $x^2 + x$ **(B)** $x^2 + 2x$ **(C)** $x^2 + 2x + 1$ **(D)** $x^2 + x + 1$

Solução:

Através da equação da reta tangente ao gráfico da função f, no ponto de abcissa zero, definida pelo enunciado, conclui-se que $f'(0) = 1$.

Determinando a derivada de cada uma das expressões definidas nas hipóteses do enunciado, no ponto de abcissa zero, tem-se:

(A): $f(x) = x^2 + x$	**(B):** $f(x) = x^2 + 2x$	**(C):** $f(x) = x^2 + 2x + 1$	**(D):** $f(x) = x^2 + x + 1$
$f'(x) = 2x + 1$	$f'(x) = 2x + 2$	$f'(x) = 2x + 2$	$f'(x) = 2x + 1$
$f'(0) = 1$	$f'(0) = 2$	$f'(0) = 2$	$f'(0) = 1$

logo, daqui se conclui que ficam excluídas as hipóteses **(B)** e **(C)**.

Dada a equação da reta tangente $y = x$ e, uma vez que, o ponto de tangência pertence à reta tangente, então, para $x = 0$ o ponto de tagência tem como coordenadas (0,0).

Substituindo nas expressões das funções definidas nas hipóteses **(A)** e **(D)**, tem-se que :

(A): $f(x) = x^2 + x$	**(D):** $f(x) = x^2 + x + 1$
$f(0) = 0$	$f(0) = 1$

Desta forma, a única expressão da função possível é a da hipótese **(A). Resposta: (A)**

Objetos e relações primárias

Linguagem:

- Termos e expressões (verbal): Derivada de uma função num ponto; declive da reta tangente ao gráfico de uma função; derivada de uma função polinomial do 2.º grau, num ponto

- Simbólica:

- $f'(0) = 1$
- $\mathrm{f}'(0) = m$
- $Quando\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}\ então\ f'(x) = 2ax + b$
- *Coordenadas do ponto de tangência T = (0,0)*

- Numérica: Determina as derivadas das funções apresentadas como hipóteses, no enunciado; determina o ponto de tangência

EXPRESSA

AJUDA

Situação - Problema: Enunciado da *Questão 2*.

Motivação

Resolução

Conceitos/Definições:

- **Prévios:** interpretação geométrica de derivada de uma função num ponto, derivada de uma função polinomial do 2.º grau, coordenadas do ponto de tangência

- **Emergentes:** Expressão da função f

Procedimentos:

- através dos dados presentes no enunciado, chega-se à conclusão que $f'(0) = 1$

- derivando as expressões das funções que constam no enunciado excluem-se duas hipóteses

- determinando o ponto de tangência e substituindo nas duas restantes hipóteses verifica-se que só numa das expressões é que a condição é válida chegando desta forma à expressão da função pretendida

Fundamentação

Justificação

Argumentos:

- A expressão da função f é dada por $f(x) = x^2 + x$.

Tabela 3.2: Objetos e relações primárias da *Questão 2*

Capítulo 4 – Metodologia

Neste capítulo indico as opções metodológicas, caraterizo os participantes, assim como, menciono os instrumentos utilizados para a recolha de dados e as diversas fases à qual este estudo atendeu. No culminar do mesmo, apresento o processo de análise dos dados.

4.1. Opções Metodológicas

Quando se fala em investigação na área da Educação são diversas as possibilidades e opções metodológicas passíveis de serem adotadas. Dependendo do seu objectivo e questões de investigação, esta pode adotar uma natureza qualitativa, quantitativa ou mista, isto é, uma abordagem que permite a complementaridade entre os métodos qualitativos e quantitativos, podendo ser aplicada em diferentes momentos da investigação.

O termo qualitativo invocado em investigação parte "do pressuposto básico de que a investigação dos fenómenos humanos, […], estão possuídos de características específicas: criam e atribuem significados às coisas e às pessoas nas interacções sociais e estas podem ser descritas e analisadas, prescindindo de quantificações estatísticas" (Chizzotti, 2003, p. 222), contrariamente, se define o termo quantitativo, que recorre à quantificação como via de assegurar a validade de uma generalização, ou seja, pressupõe que se parta de uma hipótese e que por via de observações externas se trilhe um caminho para que se possa estabelecer uma lei, caminho esse sustentado em verificações objetivas e suportado em frequências estatísticas (Chizzotti, 2003, p. 222).

Uma vez que, o presente estudo tem como finalidade descrever o ambiente de aprendizagem gerado em contexto de sala de aula na aprendizagem do conceito de derivada, tendo sido formuladas para o efeito três questões de investigação, na tentativa de dar uma resposta às mesmas, optou-se por um estudo de natureza qualitativa, que segundo Bogdan e Biklen (1994), este tipo de abordagem permite ao investigador compreender os sujeitos e os fenómenos na sua complexidade e singularidade.

Segundo os mesmos autores (Bogdan & Biklen, 1994, p. 47 - 50), uma investigação de natureza qualitativa pressupõe cinco caraterísticas consideradas essenciais, encontrando-se estas presentes no nosso estudo:

(1): “na investigação qualitativa a fonte directa dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal” (p. 47) - Neste estudo, os dados recolhidos são provenientes da turma do 11.º ano de escolaridade onde realizei a Prática de Ensino Supervisionada I e II e correspondem às produções escritas dos alunos e notas de campo realizadas pela investigadora e respetivo Núcleo de Estágio de Matemática.

(2): “a investigação qualitativa é descritiva” (p. 48) - Tal como referido na caraterística anterior, os dados recolhidos são referentes às produções escritas dos alunos, bem como, às notas de campo da investigadora e do Núcleo de Estágio de Matemática. Neste sentido, os dados serão apresentados neste trabalho sob uma perspetiva descritiva dos diferentes momentos em que se realizou a recolha de dados.

(3): “os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos” (p. 49) - Neste estudo não pretendo focar-me nos resultados das respostas dos alunos, mas sim, no processo que os mesmos desencadearam até atingirem a dita solução, assim como, as dúvidas que foram sendo apresentadas e falhas cometidas.

(4): “os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva” (p. 50) - Neste estudo, não pretendo confirmar ou rejeitar qualquer hipótese que tenha sido previamente formulada, pretendo sim, compreender as principais dificuldades sentidas pelos alunos no processo de aprendizagem do conceito derivada.

(5): “o significado é de importância vital na abordagem qualitativa” (p. 50) - Com este estudo pretendo compreender como é que os alunos se apropriam do conceito de derivada, ou seja, pretendo compreender o significado que este conceito tem para eles.

Segundo Ponte (2006), um estudo de caso,

> "visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social. O seu objectivo é compreender em profundidade o "como" e os "porquês" evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao investigador"(p.2)

Os estudos de caso podem ser essencialmente *exploratórios* onde se pretende "obter informação preliminar acerca do respectivo objecto de interesse" (Ponte, 2006, p. 6), podem ser *descritivos* cujo propósito é "descrever, isto é, dizer simplesmente "como é" o caso em apreço" (Ponte, 2006, p.6) e por fim, *analíticos* onde se procura "problematizar o seu objecto, construir ou desenvolver nova teoria ou confrontá-la com teoria já existente" (Yin, 1984 citado em Ponte, 2006, p. 6). Assim sendo, um estudo de caso para além de uma metodologia de investigação, pode ser encarado como um *design* de investigação. Mais, Ponte (1994, p. 9) citando Merriam (1988) e Denzin (1989), refere que uma investigação do tipo interpretativo "preocupa-se essencialmente com os processos e com as dinâmicas", isto é, "baseia-se em descrição grossa, que vai além dos factos e das aparências, apresentando com grande riqueza de pormenor o contexto, as emoções e as interacções sociais que ligam os diversos participantes entre si ".

Pretendendo descrever e compreender o ambiente gerado em contexto de sala de aula na aprendizagem do conceito de derivada, este estudo assume um *design* de estudo de caso exploratório centrando-se numa perspetiva interpretativa tendo o mesmo emergido do contexto e realidade presente na Prática de Ensino Supervisionada I e II.

Segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 113), "a qualidade do trabalho de campo passa pelo estabelecimento de relações, quer o método de investigação seja a observação participante, a entrevista ou a busca de documentos ", neste sentido, este estudo visa então a análise dos documentos produzidos pelos alunos relativamente à aprendizagem do conceito derivada de uma função num ponto, assim como, das notas de campo decorrentes da observação direta das aulas da unidade didática *Taxa de Variação e Derivada*.

Ao procurar compreender o ambiente de aprendizagem gerado em contexto de sala de aula na aprendizagem do conceito de derivada, através, de experiências de ensino no decurso da unidade didática, estou a refletir sobre a minha prática pedagógica. Visto, esta investigação adotar um cariz qualitativo, a mesma permite que seja possível realizar uma reflexão sobre a minha prática, possibilitando-me desta forma compreender a natureza dos problemas que daí advenham e delinear novas estratégias de ação, no futuro.

4.2. Os Participantes

Este estudo visou alunos do 11.º ano de escolaridade da turma onde o Núcleo de Estágio de Matemática realizou as suas intervenções no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada I e II. Neste sentido, torna-se então pertinente fazer, embora que breve, uma descrição da Escola e da turma envolvida neste estudo.

A Escola

Situa-se na região centro do território continental português, em concreto, na cidade de Aveiro e na atualidade oferece aos seus alunos o Ensino Básico e Ensino Secundário em regime diurno, e em cursos nas áreas das Ciências e Tecnologias, Ciências Socioeconómicas e Ciências Sociais e Humanas, estando também presente, cursos tecnológicos, em áreas de Eletricidade e Eletrónica, Administração, Construção Civil e Mecânica.

Mantém igualmente abertas as suas portas ao regime noturno, promovendo desta forma a formação pós-laboral de trabalhadores, assim como, de jovens fora da escolaridade obrigatória ao qual o ensino normal não tem conseguido dar resposta.

O seu recinto escolar é composto por três blocos: bloco central, onde se situa uma grande parte das salas de aula e onde funciona uma grande maioria dos serviços de apoio ao seu funcionamento; bloco oficinal, onde se encontram várias oficinas, assim como, também algumas salas de aulas; bloco gimnodesportivo, onde se situa o ginásio e outros serviços de apoio ao aluno.

Diariamente, esta instituição promove atividades e palestras sobre as mais diversas áreas do saber, aos seus alunos, visando desta forma enriquecer e/ou complementar as suas aprendizagens. Neste sentido, pode-se dizer que é uma escola com uma participação ativa junto dos mesmos.

A Turma

Turma do Curso Científico – Humanístico de Ciências e Tecnologias é composta maioritariamente pelo sexo masculino onde, vinte e quatro são rapazes e apenas duas são raparigas, perfazendo um total de 26 alunos à disciplina de matemática.

Com idades compreendidas entre os 16 e 18 anos revelam-se alunos interessados e motivados com a disciplina.

Traçando o seu percurso desde o Ensino Básico e, à disciplina de matemática, podemos concluir, com base nos registos disponíveis na secretaria da Escola, que dos 26 alunos atuais, 22 frequentaram o Ensino Básico nesta Escola, sendo os restantes 4 alunos, 3 deles provenientes de outras escolas e 1 aluno repetente no ano letivo corrente (2010/2011). As habilitações literárias dos encarregados de educação, apresentam-se na seguinte tabela:

Habilitações dos Encarregados de Educação	N.º de Alunos
Ensino Básico	3
Ensino Secundário	5
Licenciatura	22

Tabela 4.1: Habilitações dos Encarregados de Educação

Aferindo acerca do aproveitamento escolar dos 22 alunos, relativamente ao Ensino Básico, tem-se:

	% de Alunos		
Nota	**7.º ano**	**8.º ano**	**9.º ano**
3	13,60	22,80	22,80
4	45,50	50,00	54,50
5	40,90	27,20	22,70

Tabela 4.2: Aproveitamento dos alunos no Ensino Básico

No que diz respeito ao Ensino Secundário, em concreto, ao seu 10.º ano de escolaridade, a turma obteve um bom desempenho na disciplina de matemática, acabando com uma média de 14 valores. Ao nível do comportamento, posso dizer que de uma forma geral são alunos disciplinados e respeitadores, promovendo um ambiente tranquilo de aprendizagem.

4.3. Instrumentos de Recolha de Dados

Na realização deste estudo, um dos instrumentos utilizados na recolha de dados, foram as produções escritas dos alunos, aquando da resolução da *Tarefa*, onde se consegue ter uma perceção da compreensão e das dificuldades sentidas por estes na aprendizagem do conceito. Um outro instrumento de recolha a que se recorreu foram as notas de campo, que resultam da observação direta das aulas e que possibilitam desta forma o registo de acontecimentos, ideias, diálogos estabelecidos, estratégias adotadas, reflexões, ou seja, aspetos concretos que se destacam durante a lecionação da unidade didática.

4.4. Fases do Estudo

A realização de um trabalho desta natureza, atende a várias fases, pelo que se torna necessário que seja elaborada uma planificação do mesmo. Assim sendo, este estudo compreende três grandes fases: a primeira fase engloba a *Escolha do Tema* (Outubro 2010) e a *Revisão Bibliográfica* (de Outubro 2010 a Novembro 2012) acerca do mesmo; a segunda fase compreende a *Planificação da Unidade Didática* (de Fevereiro de 2011 a Março de 2011), a *Implementação da Unidade Didática* (de Março de 2011 a Abril de 2011) e a *Recolha de Dados* (produções escritas dos alunos relativa à resolução da *Tarefa* e notas de campo – de Março de 2011 a Abril 2011); e por último, a terceira fase diz respeito a *Análise e Discussão dos Resultados* (de Abril 2011 a Novembro 2012) e respetivas *Conclusões* (de Setembro 2012 a Novembro 2012).

4.5. Análise dos dados

Como tive oportunidade de referir no Capítulo 3, este estudo incide sobre a análise da tarefa "Taxa média de variação. Derivada num ponto – Interpretação geométrica" (*Tarefa*) da primeira aula da unidade didática *Taxa de Variação e Derivada* e na questão 2 do Grupo I (*Questão 2*) da tarefa "Derivadas da função afim, função polinomial do 2.º e 3.º grau e função racional do tipo $\frac{k}{x}$ - Aplicação" referente à sexta aula dessa mesma unidade didática.

No que diz respeito à *Tarefa*, a análise dos dados irá incidir sobre as produções escritas dos alunos, assim como, terá também em conta as notas de campo recolhidas pelo Núcleo de Estágio de Matemática no desenvolvimento desta aula. De referir, que a metodologia adotada na resolução da *Tarefa,* pressuponha o trabalho a pares, e neste sentido, foi distribuída um exemplar da *Tarefa* em cada grupo, logo, as produções escritas alvo de análise correspondem às produções escritas de todos os grupos, ou seja, treze grupos.

Relativamente à *Questão 2* (Capítulo 3) que também é alvo de análise deste estudo, por ter em conta um raciocínio desenvolvido por um aluno da turma, onde o mesmo se apoiou única e exclusivamente na calculadora gráfica na resolução desta questão de escolha múltipla, a sua análise basear-se-á apenas nas notas de campo recolhidas pelo Núcleo de Estágio de Matemática.

Assim sendo, por forma a refinar a análise tanto quanto possível, na *Tarefa*, procurou-se privilegiar os seguintes aspetos:

- Noção intuitiva de taxa média de variação
- Aplicação da definição de taxa média de variação
- Interpretação física de taxa média de variação
- Interpretação geométrica de taxa média de variação
- Derivada de uma função num ponto – Interpretação geométrica

Com base no referido, considerou-se ser pertinente identificarem-se os vários tipos de respostas presentes na turma face a cada questão colocada na *Tarefa*.

No que diz respeito à *Questão 2*, a sua análise centrar-se-á apenas na construção do raciocínio levado a cabo pelo aluno e identificação da dificuldade manifestada, recorrendo para o efeito, às notas de campo recolhidas pelo Núcleo de Estágio de Matemática.

Capítulo 5 – Análise e Discussão dos dados

Neste capítulo, serão apresentados e discutidos os resultados obtidos, com o intuito de, ir ao encontro de respostas às questões de investigação formuladas: **a)** Que dificuldades foram suscitadas nos alunos durante a aprendizagem do conceito de derivada de uma função num ponto e função derivada? e **b)**Em que medida o recurso ao *applet* promoveu a aprendizagem do conceito de derivada de uma função num ponto?.

5.1. Tarefa

1.ª fase:

- **Noção intuitiva de taxa média de variação**

Pretende-se que os alunos de forma gradual e intuitiva construam a noção de taxa média de variação. Neste sentido, as questões que serão alvo de análise neste tópico correspondem às alíneas, **1 - (a)**,**1 - (b)**, **1 - (c)** e **1 - (d)**. Para tal considerou-se o seguinte enunciado:

1 - A previsão da temperatura numa instância de ski entre as 0 e as 8h de um certo dia é dada por:

$$c(t) = 0{,}5t^2 - 4t, 0 \leq t \leq 8$$

onde *c* representa a temperatura em graus centígrados e o *t*, o tempo decorrido em horas.

(a) Com o auxílio da calculadora gráfica, esboça o gráfico $c(t)$.

Analisando as respostas presentes nos treze grupos, relativamente a esta alínea, verificou-se que todos eles conseguiram esboçar o gráfico corretamente e que tiveram em conta o contexto do problema. Em seguida, apresento o tipo de resposta obtida em turma:

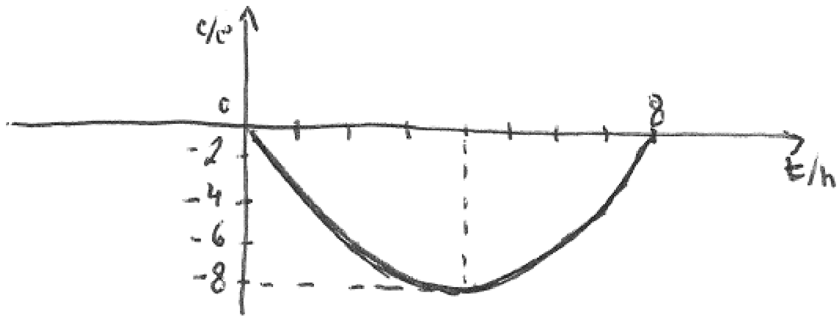


Figura 5.1 – Exemplo ilustrativo do tipo de resposta obtida à alínea **(a)**

(b) No contexto do problema, estuda a função quanto à monotonia e a existência de extremos relativos.

Os tipos de respostas presentes na turma para a alínea **(b)**, foram os seguintes:

Tipo de resposta	Número de grupos
i) Elaboram/Constroem corretamente a tabela de variação e identificam o extremo relativo da função $c(t)$, segundo o contexto do problema	1
ii) Elaboram/Constroem corretamente a tabela de variação mas não identificam o extremo relativo da função $c(t)$, segundo o contexto do problema	6
iii) Descrevem corretamente os intervalos onde a função $c(t)$ é decrescente e crescente, tendo em conta o contexto do problema, e identificam o extremo relativo	6

Tabela 5.1: Tipos de resposta na alínea **(b)**

Apresento de seguida os exemplos de resoluções que traduzem os três tipos de respostas descritas:

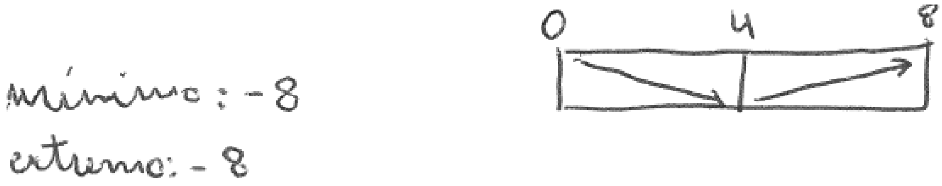


Figura 5.2: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta **(b)** - i)

Os alunos identificam corretamente o intervalo onde a função $c(t)$ é decrescente e o intervalo onde a função $c(t)$ é crescente, atendendo ao contexto do problema, assim como, verificam que a esta atinge o mínimo de $-8°C$ às 4 horas.

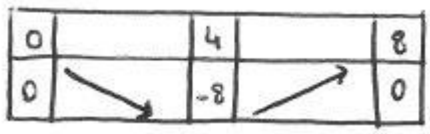


Figura 5.3: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta **(b)** - ii)

Nesta situação, verifica-se que os alunos tendo em conta o contexto do problema, identificam corretamente o intervalo onde a função $c(t)$ é decrescente e o intervalo onde ela é crescente, assim como, identificam a existência de um mínimo calculando para o efeito o seu valor, porém, não existe qualquer referência ao fato de o mesmo se tratar de um mínimo da função no intervalo considerado.

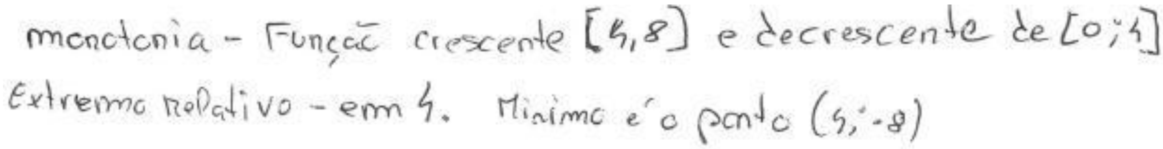


Figura 5.4: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta **(b) -** iii)

Neste tipo de resposta apresentada por seis grupos de alunos, os mesmos descrevem corretamente a situação em estudo, mas preferem outra forma de apresentar o resultado.

(c) Estuda a variação da função temperatura, hora a hora, completando a seguinte tabela.

Relativamente à resolução desta alínea, verificou-se que os alunos não sentiram qualquer tipo de dificuldade na sua resolução, interpretando desta forma, adequadamente a definição que lhes tinha sido entretanto previamente apresentada, no enunciado. Neste sentido, passo a apresentar em seguida, o tipo de resposta dada por um grupo:

$[t_0, t]$	$c(t) - c(t_0)$
[0, 1]	$c(1) - c(0) = -3,5$
[1, 2]	$c(2) - c(1) = -2,5$
[2, 3]	$c(3) - c(2) = -1,5$
[3, 4]	$c(4) - c(3) = -0,5$
[4, 5]	$c(5) - c(4) = 0,5$
[5, 6]	$c(6) - c(5) = 1,5$
[6, 7]	$c(7) - c(6) = 2,5$
[7, 8]	$c(8) - c(7) = 3,5$

Figura 5.5: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta obtida à alínea **(c)**

(d) Qual a variação média da temperatura no intervalo [0,6]?

Nesta alínea os alunos também não sentiram dificuldades na sua resolução, pelo que apresento de seguida o exemplo tipo de resposta obtida na turma:

$$\frac{-3,5 - 2,5 - 1,5 - 0,5 + 0,5 + 1,5}{6} = -1\ °C$$

Figura 5.6: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta obtida à alínea **(d)**

Até este ponto, as estratégias que os alunos adotaram refletem um bom desempenho dos mesmos, permitindo-lhes atingir as soluções que havíamos previsto aquando do plano de aula. Posteriormente à alínea **(d)**, procedeu-se à formalização do conceito (no enunciado) que intuitivamente os alunos vinham a trabalhar, isto é, definiu-se taxa média de variação.

- **Aplicação da definição de taxa média de variação**

Após a formalização do conceito de taxa média de variação, e culminando com o término da primeira fase da *Tarefa*, a alínea **(e)** visa a aplicação desta definição tendo em conta o contexto da questão 1.

(e) Calcula a $t.m.v_{[0,6]}$ e compara o valor com aquele que obtiveste no cálculo da variação média.

Relativamente a esta alínea, o tipo de respostas presentes na turma foram as seguintes:

Tipo de resposta	**Número de grupos**
i) Aplicam corretamente a definição de taxa média de variação tendo em conta o contexto do problema	5
ii) Aplicam a definição de taxa média de variação mas não têm em conta o contexto do problema nem comparam os valores obtidos	1
iii) Aplicam a definição de taxa média de variação mas não igualam a razão a $t.m.v_{[0,6]}$, não adaptam a função ao contexto do problema e nem comparam os valores obtidos	5
iv) Aplicam a definição de taxa média de variação mas não igualam a razão a $t.m.v_{[0,6]}$, porém, têm em conta o contexto do problema	1
v) Não responderam à alínea **(e)**	1

Tabela 5.2: Tipos de resposta na alínea **(e)**

Eis que de seguida, passo a apresentar um exemplo ilustrativo de cada tipo de resposta presente na turma, relativamente a esta alínea:

$$t.m.v._{[0,6]} = \frac{c(6)-c(0)}{6-0} = \frac{-6}{6} = -1$$

A taxa média de variação é igual à variação média

Figura 5.7: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta **(e)** – i)

Nesta resposta, verifica-se que os alunos conseguem interpretar a definição de taxa média de variação à luz do contexto do problema, ou seja, a função do nosso problema é a função $c(t)$ e o intervalo que lhes é pedido é o intervalo [0,6], conseguindo desta forma atingir a solução pretendida, isto é, -1. Concluem também, que o valor obtido pela $t.m.v_{[0,6]}$ é igual ao valor da variação média calculado na alínea anterior.

Outro tipo de resposta obtida na turma, foi a seguinte:

$$t_{mv[a,b]} = \frac{f(6)-f(0)}{6-0} \Leftrightarrow t.m.v_{[a,b]} = -1$$

Figura 5.8: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta **(e)** – ii)

Verifica-se que o grupo consegue interpretar a definição de taxa média de variação, porém, não têm em conta o contexto do problema subjacente à questão 1 da *Tarefa* proposta. Ou seja, eles reconhecem que no intervalo $[a, b]$, a toma o valor zero e b o valor seis, mas a linguagem simbólica por eles utilizada não traduz a situação em estudo, assim como, também se salienta o fato de os mesmos não adaptarem a função a essa mesma situação, que neste caso concreto seria, $c(t)$. Refinando a análise, podemos verificar que os alunos recorrem ao uso do sinal de equivalência, fato que em termos lógicos estaria correto, caso estivéssemos perante uma condição, o que não acontece nesta situação. Resumindo, o grupo atinge a solução pretendida, mas não concluem quanto ao fato de o valor obtido pela definição de taxa média de variação ser igual ao valor obtido na variação média, no mesmo intervalo.

O terceiro tipo de resposta obtido foi o seguinte:

$$\frac{f(6)-f(0)}{6-0}=\frac{-6}{6}=-1$$

Figura 5.9: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta **(e)** – iii)

Este caso é idêntico ao descrito anteriormente, onde se verifica que os alunos reconhecem que no intervalo $[a,b]$, a toma o valor zero e b toma o valor seis, contudo, ao nível da linguagem simbólica omitem ou “esquecem-se” do que está associado à razão por eles utilizada, isto é, $t.m.v_{[0,6]}$, assim como, de adaptarem a função ao contexto do problema em estudo, isto é, à função $c(t)$. Verifica-se também que, não apresentam resposta relativa ao fato de o valor obtido pela taxa média de variação ser igual ao valor obtido na variação média no mesmo intervalo, porém, atingem a solução pretendida.

O quarto tipo de resposta obtido na resolução desta alínea, foi o seguinte:

$$\frac{c(6)-c(0)}{6-0}=\frac{-6}{6}=-1$$

O valor obtido é o mesmo.

Figura 5.10: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta **(e)** - iv)

O tipo de resposta apresentada por este grupo, reflete que os alunos têm em conta o contexto do problema, porém, ao nível da linguagem simbólica ainda existem algumas dificuldades, uma vez que, se esquecem de igualar a razão a $t.m.v_{[0,6]}$. Contudo, devo salientar que o valor por eles obtido no cálculo da $t.m.v_{[0,6]}$, assim como, a resposta por eles apresentada se encontram corretos.

De uma formal geral, e uma vez concluída a primeira fase da *Tarefa* que lhes foi proposta, posso dizer que o desempenho dos alunos foi bom tendo conseguido chegar às soluções por nós previstas, aquando do plano de aula, porém, a alínea **(e)** revelou-se de cunho mais complexo evidenciando-se as dificuldades sentidas na turma na resolução desta mesma alínea. Em concreto, os alunos manifestaram alguma falta de rigor ao nível da linguagem simbólica matemática por eles utilizada. Ou seja, uma vez formalizada a definição de taxa média de variação, os alunos não conseguem a sua particularização face a um problema.

Após a resolução desta primeira fase da *Tarefa*, é realizado um momento de discussão de resultados na turma e consequente síntese. Com o intuito de se iniciar a segunda fase da *Tarefa*, colocou-se a questão aos alunos se a partir da taxa média de variação estes conseguiriam tirar conclusões sobre a monotonia da função num dado intervalo, pelo que estes responderam que não, suscitando desta forma a necessidade de encontrar uma "ferramenta" que permitisse descrever o comportamento da função num dado intervalo.

2.ªfase:

- **Interpretação física da taxa média de variação**

Pretende-se que os alunos, através do *applet*, determinem o valor da taxa média de variação nos intervalos pedidos, e que atribuam um significado físico a este conceito matemático. A alínea a ser analisada é a **2 – (a)**

2 **–** Com o aproximar da primavera houve um aumento da temperatura. Como tal, foi preciso recorrer-se a um canhão de produção de neve artificial para assegurar o funcionamento da estância de ski. Fixando a posição e o ângulo de orientação do canhão, o percurso do jacto de neve é descrito por:

$$j(t) = -0{,}5t^2 + 5t, 0 \leq t \leq 10$$

onde t é o tempo decorrido em segundos e $j(t)$ está definido em metros.

(a) Compara a taxa média de variação nos intervalos [1,3] e [6,8]. Qual o significado físico dos valores obtidos?

No início, comecei por observar a interação dos alunos com o *applet*, onde pude verificar a existência de dificuldades sentidas por estes em dois momentos. O primeiro momento reporta-se à introdução da função $j(t) = -0,5t^2 + 5t$, no *applet*, onde se verificou que estes não conseguiam elevar o termo t ao quadrado, fato que acabou por ser facilmente ultrapassado, quando questionados sobre a forma como procederiam para elevar termos de ordem superior na calculadora gráfica. Relativamente ao segundo momento, reporta-se ao incremento. Os alunos através do manuseamento do *applet,* deveriam chegar à conclusão que este se encontra relacionado com a amplitude do intervalo, porém, sentiu-se a necessidade de questioná-los sobre o que é que aconteceria ao mesmo, caso atribuíssem outros valores à opção "*incremento*" do *applet*, tendo chegado a essa conclusão, à posteriori. De seguida apresento, algumas simulações que foram realizadas pelos alunos, no sentido de ir ao encontro dessa mesma conclusão.

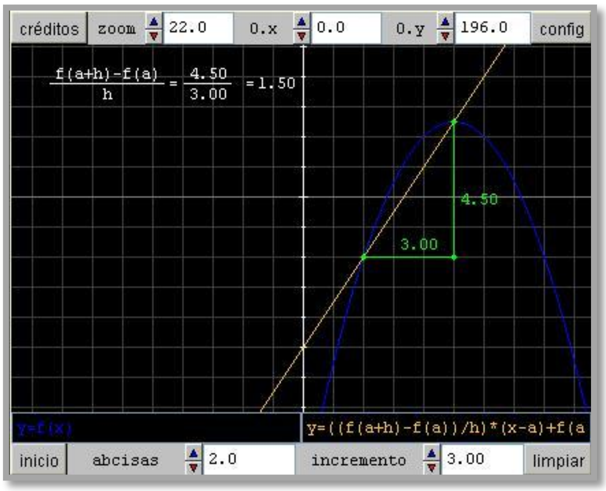


Figura 5.11: Exemplo ilustrativo antes de os alunos fazerem variar o valor do incremento

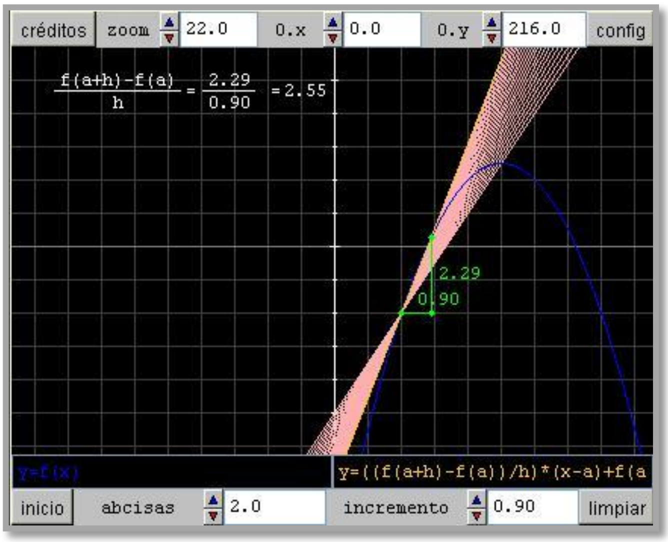


Figura 5.12: Exemplo ilustrativo após um aluno ter feito variar o valor do incremento para 0,90

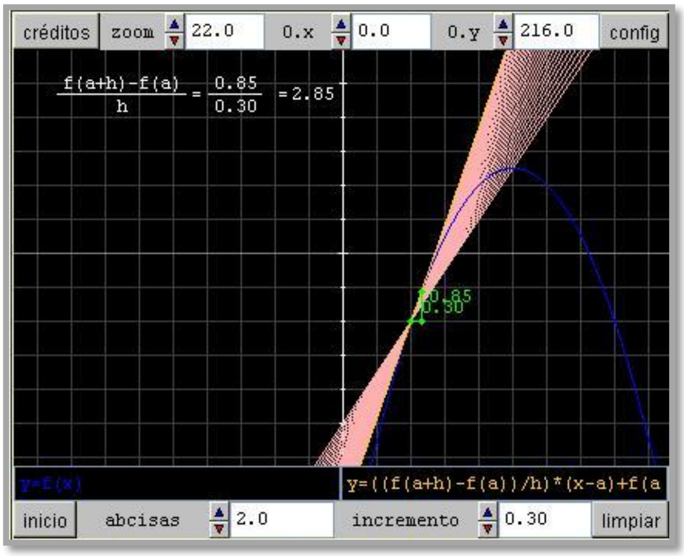


Figura 5.13: Exemplo ilustrativo após um aluno ter feito variar o valor do incremento para 0,30

Uma vez ultrapassadas as dificuldades sentidas com o *applet*, passou-se então à resolução da alínea **(a)**. Os tipos de resposta presentes na turma, relativamente à resolução da mesma foram os seguintes:

Tipo de resposta	Número de grupos
i) Recorrem ao *applet* para determinar a taxa média de variação nos intervalos solicitados e interpretam fisicamente o conceito	3
ii) Aplicam a definição de taxa média de variação para determinar a mesma nos intervalos solicitados e interpretam fisicamente o conceito	10

Tabela 5.3: Tipos de resposta na alínea **(a)**

No que diz respeito ao tipo de resposta i), encontraram-se duas formas diferentes de apresentação das mesmas, sendo que numa delas fica evidente uma dificuldade sentida pelos alunos ao nível da linguagem simbólica do conceito de taxa média de variação. Assim sendo, passamos então a apresentá-las:

→ significa que é a velocidade média do jacto em cada intervalo

$t.m.v_{[1,3]} = 3,00$

$t.m.v_{[6,8]} = -2,00$

Figura 5.14: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta **(a)** - i)

Neste caso, verifica-se que o grupo de alunos conseguiu manusear corretamente o *applet*, permitindo-lhes desta forma atingir a solução pretendida, assim como, também atribuem corretamente o significado físico deste conceito matemático.

A outra forma de resolução encontrada do tipo de resposta i), foi a seguinte:

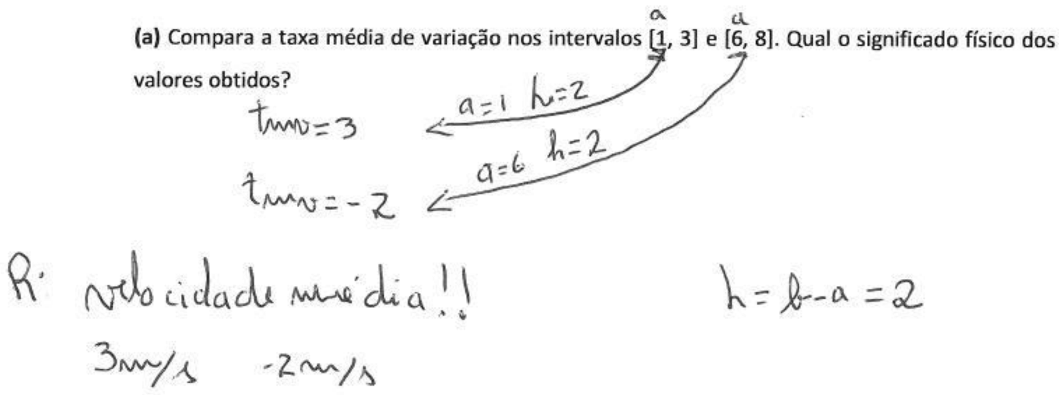


Figura 5.15: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta **(a)** - i)

Nesta situação pode-se dizer que, apesar do grupo manusear adequadamente o *applet* permitindo-lhes chegar à solução correta, aquando do registo dos resultados, manifesta-se uma dificuldade na linguagem simbólica inerente ao conceito de taxa média de variação, isto é, os alunos omitem ou “esquecem-se” de identificar o intervalo que está a ser alvo de estudo nesta alínea, ou seja, $t.m.v_{[1,3]}$ e $t.m.v_{[6,8]}$, respetivamente. Em relação à interpretação física deste conceito matemático, esta revela-se correta.

Relativamente, ao tipo de resposta ii), também foram encontradas duas formas diferentes de resolução, pelo que passo a apresentar de seguida:

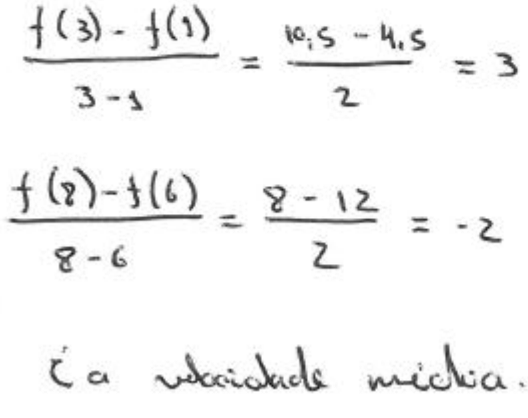


Figura 5.16: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta **(a)** - ii)

Com base na figura acima, verifica-se que os alunos chegam ao resultado pretendido, porém, revelam dificuldades ao nível da linguagem simbólica inerente à definição de taxa média de variação, ou seja, os alunos esquecem-se de igualar a expressão a $t.m.v_{[1,3]}$ e $t.m.v_{[6,8]}$, respetivamente (fato este já ocorrido anteriormente na alínea **(e)** da primeira fase da *Tarefa)*, assim como, não adaptam a função ao contexto do problema em estudo. Contudo, fazem uma interpretação física correta deste conceito matemático.

A outra forma de resolução encontrada do tipo de resposta ii), foi a seguinte:

$$t.m.v = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \Leftrightarrow t.m.v. = \frac{10,5 - 4,5}{2} \Leftrightarrow t.m.v = 3 \text{ m/s}$$

$$t.m.v = \frac{f(8) - f(6)}{8 - 6} \Leftrightarrow t.m.v = \frac{6 - 12}{2} \Leftrightarrow t.m.v = -2 \text{ m/s}$$

R: Velocidade média do jacto de neve ao longo dos percursos [1, 3] e de [6, 8]

Figura 5.17: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta **(a)** - ii)

Neste tipo de resposta, verifica-se que os alunos revelam dificuldades ao nível da linguagem simbólica inerente à definição da taxa média de variação onde se esquecem de especificar para que intervalos estão a calcular a mesma, isto é, $t.m.v_{[1,3]}$ e $t.m.v_{[6,8]}$, respetivamente, assim como, não adaptam a função ao contexto do problema em estudo. Mais, os alunos recorrem ao sinal de equivalência como se se tratasse de uma condição, o que na realidade não o é. Contudo, é de salientar que os resultados obtidos pela definição de taxa média de variação revelam-se corretos, assim como, o significado físico atribuído a este conceito matemático.

- ## Interpretação geométrica de taxa média de variação

Pretende-se que os alunos recorrendo ao *applet,* interpretem geometricamente o conceito de taxa média de variação, ou seja, que verifiquem que este corresponde ao declive da reta secante ao gráfico da função nos pontos de abcissa a e $a + h$. As alíneas que serão alvo de análise são a **2 – (b)** e a **2 – (c)**.

(b) Calcula a taxa média de variação da função j em intervalos sucessivos do tipo $[3{,}3 + h]$, com h a tender para zero, completando a seguinte tabela.

h	1	0,5	0,2	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
$\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$									

Analisando as respostas presentes na turma, constatou-se que os treze grupos de alunos conseguiram preencher a tabela com sucesso, revelando desta forma, destreza no manuseamento do *applet*. Assim sendo, o tipo de resposta presente nesta alínea foi:

h	1	0,5	0,2	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
$\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$	1,5	1,75	1,9	1,95	1,995	1,9995	1,99994999	1,999995	1,9999995

Figura 5.18: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta à alínea **(b)**

(c) Qual o significado geométrico e físico da taxa média de variação no intervalo $[3{,}3 + h]$?

Relativamente a esta alínea o tipo de respostas obtidas na turma, foram as seguintes:

Tipo de resposta	Número de grupos
i) Interpretam geométrica e fisicamente o conceito de taxa média de variação	7
ii) Interpretam fisicamente o conceito de taxa média de variação e geometricamente de forma incorreta	6

Tabela 5.4: Tipos de resposta na alínea **(c)**

Um exemplo ilustrativo do tipo de resposta i), verificada na resolução desta alínea foi o seguinte:

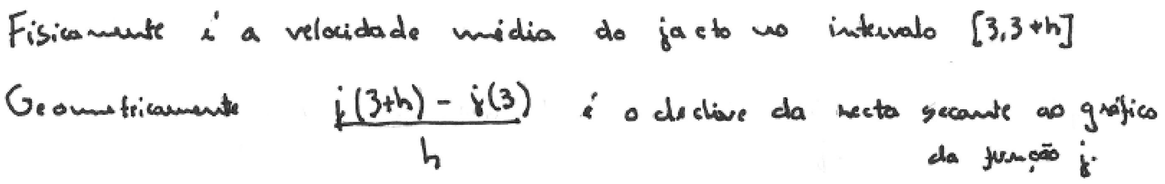


Figura 5.19: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta **(c)** - i)

Os alunos ao atribuírem, no *applet*, valores ao incremento sucessivamente mais pequenos, verificaram geometricamente que a expressão $\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$ representava o declive da reta secante ao gráfico da função j, chegando desta forma à solução pretendida. De salientar que, os mesmos também atribuem corretamente o significado físico ao conceito matemático taxa média de variação.

Relativamente ao tipo de resposta ii), temos como exemplo o seguinte:

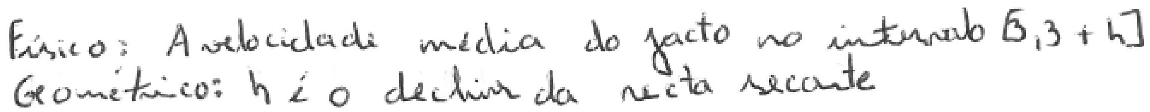


Figura 5.20: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta **(c)** - ii)

Analisando esta resposta verifica-se que os alunos conseguem atribuir corretamente o significado físico ao conceito matemático taxa média de variação, mas geometricamente a interpretação por eles realizada revela-se incorreta. Estes deveriam ter concluído que a expressão $\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$

geometricamente representa o declive das retas secantes ao gráfico da função nos pontos de abcissa 3 e $3 + h$.

- **Derivada de uma função num ponto – Interpretação geométrica**

Pretende-se através da exploração do *applet,* que os alunos conjeturem que os declives das retas secantes que passam pelos pontos $(a, f(a))$ e $(a + h, f(a + h))$ tendem para o declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa a , quando o incremento h, tende para zero, por valores positivos quer por valores negativos (noção de taxa de variação). Posteriormente, será realizada a formalização do conceito de derivada de uma função num ponto. As alíneas que irão ser analisadas são a **2 – (d)** e a **2 – (e)**. Assim sendo, tem-se:

> **(d)** Conjectura o valor para o qual tende a expressão $\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$, quando h tende para zero, e interpreta geométrica e fisicamente o seu significado.

Nesta alínea, o tipo de respostas presentes na turma foram as seguintes:

Tipo de resposta	Número de grupos
i) Conjeturam o valor para o qual tende a expressão $\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$ e interpretam geométrica e fisicamente	6
ii) Conjeturam o valor para o qual tende a expressão $\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$, interpretam fisicamente e geometricamente (parcialmente)	5
iii) Não responderam à alínea **(d)**	2

Tabela 5.5: Tipos de resposta na alínea **(d)**

De seguida apresento um exemplo do tipo de respostas i) à alínea **(d)**.

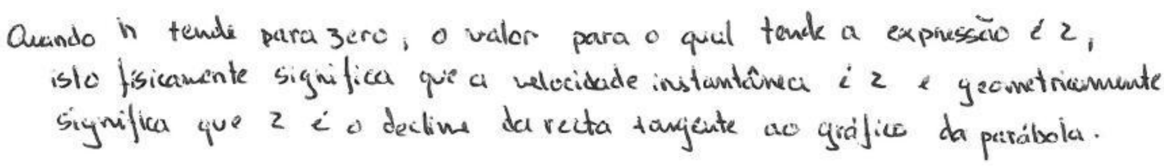

Quando h tende para zero, o valor para o qual tende a expressão é 2, isto fisicamente significa que a velocidade instantânea é 2 e geometricamente significa que 2 é o declive da recta tangente ao gráfico da parábola.

Figura 5.21: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta **(d)** – i)

Nesta resposta verifica-se que os alunos, através da manipulação do *applet*, conseguem conjeturar corretamente o valor para o qual tende a expressão $\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$ quando o incremento h tende para zero, assim como, conseguem também concluir de forma correta que esse valor corresponde ao declive da reta tangente ao gráfico da função dada pelo enunciado. Quanto à interpretação física esta também se revela correta.

Relativamente ao tipo de resposta ii) à alínea **(d)**, tem-se o seguinte exemplo:

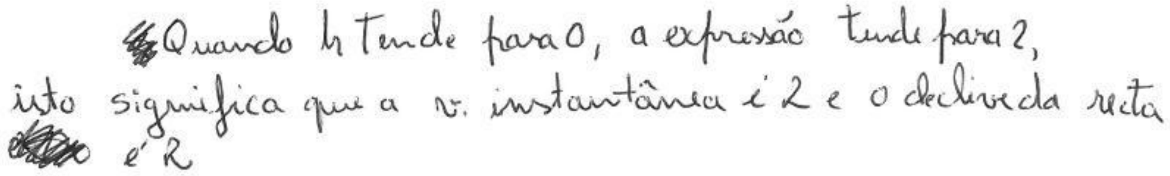


Figura 5.22: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta **(d)** – ii)

Nesta resposta verifica-se que os alunos, interpretam apenas parcialmente a situação descrita pelo *applet*, ou seja, estes conjeturam corretamente o valor para o qual tende a expressão $\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$ quando o incremento h tende para zero, atribuem também corretamente o significado físico, contudo, no que diz respeito à interpretação geométrica esta revela-se insuficiente, uma vez que não referem a que tipo de reta faz corresponder o valor do declive dois.

(e) Explorando o applet, interpreta geometricamente o que acontece quando h se aproxima de zero por valores negativos. Que concluis?

Relativamente a esta alínea, o tipo de respostas encontradas na turma, foram as seguintes:

Tipo de resposta		Número de grupos
i)	Interpretam geometricamente a situação descrita	4
ii)	Não interpretam geometricamente a situação descrita	4
iii)	Não responderam à alínea **(e)**	5

Tabela 5.6: Tipos de resposta na alínea **(e)**

Apresento de seguida os dois tipos de resposta verificados em turma. Como exemplo do tipo de resposta i) à alínea **(e)**, apresenta-se o seguinte:

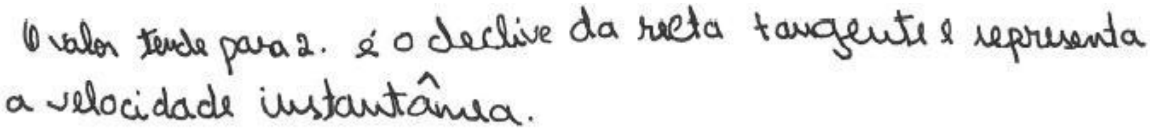

O valor tende para 2. é o declive da reta tangente e representa a velocidade instantânea.

Figura 5.23: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta **(e)** – i)

Nesta resposta apresentada pelos alunos verifica-se que os mesmos conseguem interpretar corretamente a situação descrita pelo *applet*, acabando por complementar a sua resposta a esta alínea. Assim sendo, os mesmos começam por referir que o valor para o qual tende a expressão $\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$ quando h tende para zero, por valores negativos é 2 ,geometricamente esse valor corresponde ao declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 3, e por fim, ainda atribuem corretamente o significado físico.

Relativamente ao segundo tipo de resposta tem-se o seguinte exemplo:

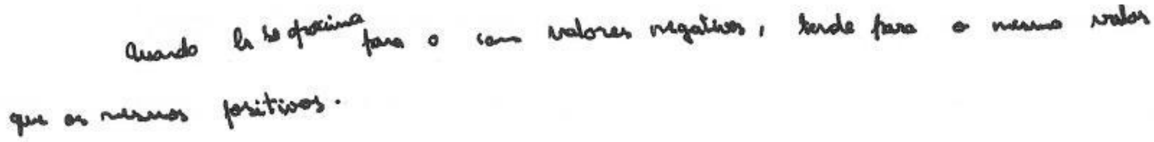

Quando h se aproxima para 0 com valores negativos, tende para o mesmo valor que os mesmos positivos.

Figura 5.24: Exemplo ilustrativo do tipo de resposta **(e)** – ii)

Nesta resposta os alunos, interpretam corretamente o valor para o qual tende a expressão $\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$ quando h tende para zero, por valores negativos, acabando mesmo por estabelecer uma comparação com a alínea anterior, **(d)**, porém, não interpretam geometricamente a situação como era solicitado pelo enunciado.

Realizando uma pequena observação relativamente ao elevado número de ausência de respostas nesta alínea, aponto como causas possíveis, o fato de os alunos terem sentido dificuldades na resolução das alíneas anteriores, assim como, os trinta minutos propostos para a resolução desta segunda fase da *Tarefa* se revelarem insuficientes. Devo referir que, por breves momentos ponderou-se atribuir mais algum tempo aos alunos para a resolução desta mesma alínea, porém, verificou-se que isto comportaria implicações no momento de discussão inicialmente previsto, ou seja, este ficaria bastante reduzido ou teria que transitar para a aula seguinte, cenário que se revelaria manifestamente não aceitável, pois os alunos acabariam por não perceber a intenção subjacente a esta aula, assim como, não se proporcionaria um espaço para o esclarecimento de dúvidas que tivessem já surgido no decurso da sua realização, nem de síntese e formalização do conceito derivada de uma função num ponto. Neste sentido, esta ideia acabou por ser descartada.

Com base no que observei no desenvolvimento da aula, posso referir que os alunos se mostraram bastante empenhados e motivados na resolução da *Tarefa* com a introdução do *applet*, tendo verificado uma grande interação e discussão de ideias entre eles.

De uma forma geral, penso que o tipo de abordagem realizada ao conceito de derivada de uma função num ponto, com o auxílio do applet, parece ter permitido aos alunos construir imagens mentais relacionadas com o conceito de certa forma consistentes levando-me a supor/crer que as mesmas promoveram a formação do *conceito definição* de derivada de uma função num ponto nos alunos. Relativamente às respostas apresentadas pelos mesmos, verificou-se a existência de alguma imprecisão ao nível da linguagem simbólica, o que me ser parece natural, visto esta ter sido a primeira aula da unidade didática *taxa de Variação e Derivada*.

Na segunda aula da unidade didática *Taxa de Variação e Derivada* os alunos resolveram uma tarefa de aplicação do conceito de derivada de uma função num ponto, na terceira aula pretendia-se que os alunos por via da interpretação geométrica aferissem o valor da derivada de uma função num ponto, assim como, que identificassem se uma função admite derivada num determinado ponto, na quarta aula da unidade trabalhou-se o conceito de função derivada, na quinta aula, deduziram-se as expressões das derivadas da função afim, polinomial do 2.º e 3.º grau e da função racional do tipo $\frac{k}{x}$, e por fim, na sexta aula da unidade didática *Taxa de Variação e Derivada* que se intitula por "Derivadas da função afim, polinomial do 2.º e 3.º grau e função racional do tipo $\frac{k}{x}$ - Aplicação" pretendia-se que os alunos determinassem a expressão da derivada de algumas funções recorrendo aos resultados provados na aula anterior. É relativa a esta sexta aula que iremos realizar a nossa próxima análise.

5.2. *Questão 2*

A *Questão* 2 tem como objetivo que os alunos determinem a expressão da função f partindo da equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa zero. Começo por apresentar em seguida o enunciado desta questão:

2. A recta de equação $y = x$ é tangente ao gráfico de uma função f, no ponto de abcissa 0. Qual das expressões seguintes pode definir a função f.

(A) $x^2 + x$ **(B)** $x^2 + 2x$ **(C)** $x^2 + 2x + 1$ **(D)** $x^2 + x + 1$

De referir que, os raciocínios apresentados pelos alunos da turma foram ao encontro com a solução (Capítulo 3) prevista aquando da planificação da aula, exceto o deste aluno que na justificação do mesmo, manifestou dificuldades ao nível da interpretação geométrica de derivada de uma função num ponto. Assim sendo, vamos então proceder à sua análise.

Perante o enunciado acima, o aluno começou por referir que excluía as duas últimas hipóteses, a **(C)** e a **(D)**, uma vez que, o ponto de coordenadas (0,0) não pertencia a essas funções, sendo esta, uma consequência do enunciado. Posteriormente, recorreu à calculadora gráfica, e baseando-se única e exclusivamente nesta exclui a hipótese **(B)**, argumentando que a reta é secante e não tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa zero. Por forma a traduzir a situação apresentada pelo aluno, apresento de seguida um exemplo possível do cenário que este visualizou através da calculadora gráfica.

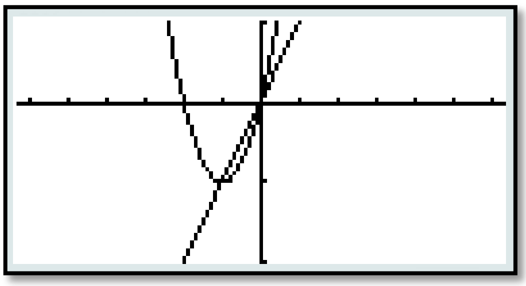


Figura 5.25: Representação gráfica da função $f(x) = x^2 + 2x$ e da reta de equação $y = x$

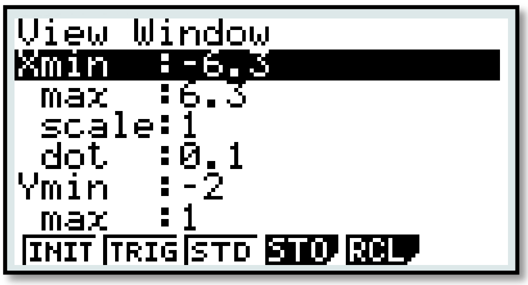


Figura 5.26: Janela utilizada na representação gráfica

Em jeito de síntese, o respetivo aluno afirma que a resposta correta seria então a hipótese **(A)**, porque a reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa zero, só "tocava" a função num só ponto, como se pode verificar através do cenário abaixo.

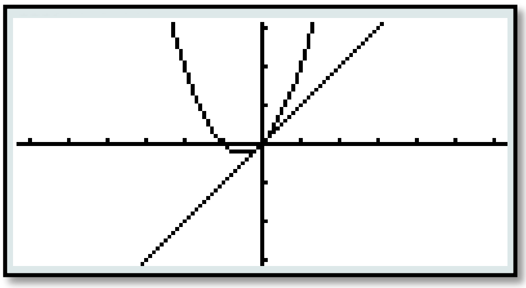


Figura 5.27: Representação gráfica da função $f(x) = x^2 + x$ e da reta de equação $y = x$

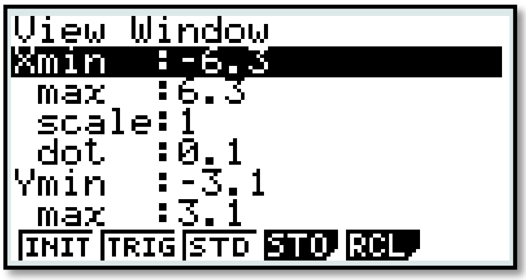


Figura 5.28: Janela utilizada na representação gráfica

Apesar de o aluno em causa ter atingido a solução pretendida, os argumentos a que recorre para justificar o seu raciocínio merecem particular atenção da nossa parte, na medida em que nos dão uma clara indicação de que este possa ter desenvolvido dificuldades relativas à interpretação geométrica de derivada de uma função num ponto. Ou seja, quando o aluno refere que a reta tangente "toca apenas num só ponto" do gráfico da função, leva-nos a admitir que este ainda se encontra agarrado ao conceito de reta tangente anteriormente aprendido na Geometria, sentindo-se necessidade de analisar o seu argumento. O fato de uma reta intersetar em mais que um ponto do gráfico de uma função, não significa que ela não seja localmente tangente num desses pontos, e portanto, o seu declive dá-nos o valor da derivada da função nesse ponto. Logo, o raciocínio do aluno só se encontra válido, porque na situação em estudo se está perante uma função polinomial do 2.º grau, e como tal, na realidade a reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa zero só "toca" a função nesse mesmo ponto.

De referir que esta dificuldade que surgiu no aluno, já havia sido identificado pelos investigadores Shlomo Vinner (1983) e David Tall (1989) citados em Giraldo et al. (2003, p. 2), nas suas pesquisas sobre o conceito de derivada, tendo chegado precisamente à conclusão que o *conceito imagem* que os alunos tinham da noção de tangência se encontrava essencialmente associado a problemas de geometria, onde a reta tangente a uma curva apenas a "toca" num único ponto, mas que quando esta noção é transposta para o Cálculo o *conceito imagem* dos alunos se revela inconsistente.

Capítulo 6 - Conclusão

Neste capítulo, começo por apresentar uma breve síntese do estudo e posteriormente, as respetivas conclusões visando desta forma, responder às questões de investigação inicialmente formuladas. No culminar do mesmo, realizarei uma breve reflexão sobre o significado e importância que este estudo tem para o meu enriquecimento pessoal e profissional, assim como, apresentarei algumas limitações que foram subjacentes à sua realização.

6.1. Síntese do estudo

Este estudo tem como finalidade descrever o ambiente de aprendizagem gerado em contexto de sala de aula na aprendizagem do conceito de derivada. Neste sentido foram formuladas as seguintes questões de investigação:

a) Que dificuldades foram suscitadas nos alunos durante a aprendizagem do conceito de derivada de uma função num ponto e função derivada?
b) Em que medida o recurso ao *applet* promoveu a aprendizagem do conceito de derivada de uma função num ponto?
c) Qual a adequação didática da planificação e implementação da unidade didática *Taxa de Variação e Derivada*?

Dada a importância do conceito matemático derivada e a sua diversidade de conexões com outras áreas do saber, na planificação da unidade didáctica *Taxa de Variação e Derivada* procurou-se inserir algumas tarefas de natureza exploratória sempre que possível contextualizando-as, para a introdução dos conceitos subjacentes à mesma, assim como, tarefas de aplicação.

No referencial teórico, abordei alguns temas fundamentais que constituíram a base para o desenvolvimento deste estudo, em concreto, que a compreensão dos conceitos matemáticos ocorre com base nas noções de *conceito imagem* e *conceito definição* de David Tall e Shlomo Vinner (1981), assim como, a perspetiva ontosemiótica de Godino (2008) como ferramenta de análise e reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

No que diz respeito à metodologia, o presente estudo é de natureza qualitativa apresentando um caráter descritivo e interpretativo, como forma de descrever e identificar as dificuldades que surgiram durante a aprendizagem do conceito de derivada de uma função num ponto e de função derivada. Relativamente aos participantes visados neste estudo, são alunos do 11.º ano de escolaridade da turma onde efetuei as minhas intervenções no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada I e II no decurso do ano letivo 2010/2011. Os instrumentos de recolha de dados utilizados foram as produções escritas dos alunos, em concreto, aquando da resolução da *Tarefa*, assim como, as notas de campo que foram sendo recolhidas durante a lecionação da unidade didática *Taxa de Variação e* Derivada. No que diz respeito à análise de dados, esta incidiu sobre toda a turma com o intuito de se ficar a saber quais as dificuldades suscitadas na aprendizagem do conceito de derivada de uma função num ponto e função derivada.

6.2. Conclusões do estudo

Neste subcapítulo apresento as principais conclusões do estudo, onde procuro dar resposta às questões de investigação inicialmente formuladas, mas tendo sempre presente, que as mesmas não podem ser generalizáveis, uma vez que, a amostra não é representativa.

6.2.1. Que dificuldades foram suscitadas nos alunos durante a aprendizagem do conceito de derivada de uma função num ponto e função derivada?

Com o intuito de responder a esta questão de investigação, irei analisar as dificuldades sentidas ao nível da *Tarefa* e da *Questão 2*.

Durante a resolução da *Tarefa* as principais dificuldades sentidas pelos alunos foram essencialmente ao nível da utilização da linguagem simbólica associada à definição de taxa média de variação, em concreto, na alínea **(e)** referente à primeira fase da *Tarefa* e na alínea **(a)** da segunda fase da *Tarefa*. Na alínea **(c)** da segunda fase da *Tarefa*, também se manifestaram dificuldades na interpretação geométrica de taxa média de variação no intervalo $[3,3+h]$, onde para o efeito, os alunos consideraram que o incremento corresponde ao declive da reta secante. Por fim, tem-se a alínea **(d)**, também relativa à segunda fase da *Tarefa,* onde os alunos fazem apenas parcialmente uma interpretação geométrica do valor obtido pela expressão $\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$

quando h tende para zero, ou seja, os mesmos apenas referem que o valor dois é o declive da reta, não especificando de que tipo de reta se trata.

Relativamente à *Questão 2*, esta diz respeito a um raciocínio apresentado por um aluno da turma, em resposta à referida questão, onde o mesmo manifestou dificuldades na interpretação geométrica do conceito derivada de uma função num ponto. O tipo de dificuldade manifestada por este aluno vai de encontro com os estudos realizados por Shlomo Vinner (1983) e David Tall (1989) citados em Giraldo et al. (2003, p.2), onde ambos os investigadores salientam o fato de o *conceito imagem* que os alunos possuem relativo à noção de tangência se encontrar essencialmente associado a problemas de geometria, onde a ideia de tangente a uma curva é de que apenas a "toca" num único ponto contrária à de secante que "corta" a curva em dois pontos. Ora isto conduz a um estreitamento do *conceito imagem* de tangente que não é consistente com a noção de tangente no Cálculo.

6.2.2. Em que medida o recurso ao *applet* promoveu a aprendizagem do conceito de derivada de uma função num ponto?

A introdução do *applet* na *Tarefa* surge com o intuito de que os alunos construam intuitivamente e gradualmente o conceito de derivada de uma função num ponto. Neste sentido, e com base na análise à alínea **(b)** da segunda fase da *Tarefa*, verificou-se que os alunos não sentem qualquer tipo de dificuldade no cálculo da taxa média de variação para amplitudes de intervalos sucessivamente mais pequenas (noção intuitiva de limite). Contudo, quando se refina a análise da questão **(c)** relativa a esta mesma fase da *Tarefa*, a interpretação geométrica associada a este conceito matemático (taxa média de variação) suscita já dificuldades nos mesmos. Os alunos referem que o incremento é o declive da reta secante. De uma forma geral, penso que o tipo de abordagem realizada ao conceito de derivada de uma função num ponto, aliado a este recurso, parece ter permitido aos alunos construir imagens mentais relacionadas com o conceito, de alguma forma consistentes, já que com base na análise da alínea **(d)** e **(e)**, se verifica que a turma no geral conseguiu aferir o valor para o qual tende a expressão $\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$ quando h tende para zero, assim como, realizar uma interpretação geométrica desse valor, correta. Posteriormente, foi então introduzida a definição formal de derivada de uma função num ponto.

Ainda relativamente a este recurso, posso referir a motivação dos alunos na resolução da *Tarefa*, onde se assistiu a uma forte partilha de ideia entre eles, promovendo desta forma capacidades transversais como a comunicação matemática e o raciocínio matemático, e onde os mesmos adotaram uma participação ativa em prol da sua aprendizagem.

6.2.3. Qual a adequação didática da planificação e implementação da unidade didática *Taxa de Variação e Derivada*?

Antes de começar por responder a esta questão de investigação formulada, começo por referir que a análise da adequação didática neste estudo, comporta algumas especificidades, nomeadamente, no que diz respeito, à componente de adequação afetiva e à componente de adequação ecológica. Neste sentido, uma vez que a turma onde realizei as minhas intervenções, no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, pertence à minha orientadora de estágio, a relação de professor-aluno que se estabelece não é uma relação natural, e assim sendo, não possuo informações relativas ao passado dos alunos, bem como, sobre as condições externas à aula. Tendo em conta o que foi mencionado, não me é possível realizar uma análise destas componentes de forma pormenorizada.

De seguida, vai-se então proceder à análise das várias componentes da adequação didática da unidade didática *Taxa de Variação e Derivada* implementada.

Adequação epistémica

A planificação desta unidade didática atendeu às diretrizes do Programa de Matemática A do Ensino Secundário, da planificação anual da escola, assim como, teve em conta algumas investigações realizadas. Neste sentido, a aprendizagem do conceito de derivada de uma função num ponto foi feito através da interpretação geométrica de taxa de variação, recorrendo à noção intuitiva de limite, e explorando exemplos de outras disciplinas, no nosso caso da Física. Posteriormente, foi introduzido o conceito de função derivada; foram realizadas as deduções das expressões das derivadas da função afim, polinomial do 2.º e do 3.º grau, assim como, da função racional do tipo $\frac{k}{x}$; posteriormente, foi realizado o estudo do sentido de variação e extremos de uma função recorrendo a argumentos geométricos; e por fim, procedeu-se à resolução de problemas de otimização. Assim sendo, alguns destes conteúdos foram abordados mediante tarefas de natureza exploratória sempre que possível contextualizadas, por exemplo, a tarefa que teve como recurso um *applet*, recorreu-se a um exemplo da Física, como forma de privilegiar a introdução do conceito de derivada de uma função num ponto, e onde os alunos tiveram que formular conjeturas, justificar raciocínios matemáticos por eles efectuados, sendo posteriormente, aplicados os conceitos até então aprendidos, através de tarefas de aplicação. Neste sentido, considero que houve adequação epistémica.

<u>Adequação cognitiva</u>

Como tive oportunidade de referir no culminar da adequação epistémica, na elaboração desta unidade didática procurou-se desenvolver tarefas de natureza exploratória, que permitissem aos alunos formular, conjeturar, justificar raciocínios, assim como, tarefas de aplicação. Neste sentido para a aprendizagem do conceito de derivada recorreu-se a conhecimentos prévios dos alunos, em concreto, equação reduzida de uma reta, reta tangente, reta secante, declive de uma reta, como forma de privilegiar a argumentação geométrica envolta deste mesmo conceito. A implementação desta unidade didática adotou uma dinâmica de resolução de tarefas e sua discussão em turma. Na planificação desta unidade teve-se em linha de conta as possíveis dificuldades que pudessem surgir nos alunos, tendo estas sido esclarecidas tanto pela professora, assim como, pelo próprios colegas, aquando da sua implementação. Neste sentido, esta revelou-se adequada, onde parece que as estratégias delineadas inibiram o aparecimento de conflitos nos alunos, tendo ficado evidente ao nível do seu desempenho nos testes finais relativos a esta temática. Logo perante tudo isto, houve adequação cognitiva.

<u>Adequação mediacional</u>

Os recursos utilizados na unidade didática *Taxa de Variação e Derivada*, foram um *applet* e a calculadora gráfica que aliados a algumas tarefas de cariz exploratório contextualizadas, auxiliaram os alunos na compreensão dos conceitos matemáticos. Ambos os recursos foram introduzidos com a finalidade de promover uma abordagem intuitiva e gradual dos conceitos subjacentes à unidade didática, em concreto, derivada de uma função num ponto, função derivada, sentido de variação e extremos de uma função, onde a partir desta abordagem inicial, foram sido introduzidos formalmente.

Relativamente ao tempo previsto para a implementação da unidade didática, posso dizer que este foi cumprido, embora por vezes entre algumas aulas se tivesse procedido a algumas adaptações.

Perante tudo isto, houve adequação mediacional.

Adequação interacional

No decurso das aulas da unidade didática *Taxa de Variação e Derivada*, pude verificar que na resolução das tarefas que foram sendo propostas houve uma forte partilha de ideias e cooperação entre os alunos, a título de exemplo posso referir a aula do *applet*, assim como, nos momentos previstos para a discussão de resultados e síntese (interação professor-aluno e aluno-aluno). Quando surgiram dúvidas estas foram sendo esclarecidas, tanto pelo professor, como por vezes, entre os próprios alunos. Neste sentido, posso dizer que houver adequação interacional.

Adequação afetiva

Relativamente a esta componente de adequação didática, posso referir que, uma vez que se procurou desenvolver tarefas ao longo da unidade didática que estabelecessem sempre que possível, uma conexão com outras áreas do saber, assim como, que integrassem tecnologias (calculadora gráfica e o *applet)* e ainda o fato de se ter privilegiado aspetos da História da Matemática sobre o conceito de derivada, revelaram ser pontos fortes na motivação, empenho, interesse e participação ativa (várias vezes se assistiu a discussão de ideias entre discente-discente sobre os conceitos abordados) dos alunos face às aulas desta mesma unidade, como se teve oportunidade comprovar. Neste sentido, posso dizer que houve adequação afetiva.

Adequação ecológica

A unidade didática *Taxa de Variação e Derivada* foi planeada segundo os conteúdos programáticos e indicações metodológicas constantes no Programa de Matemática A do Ensino Secundário, onde para o efeito, se teve em conta a planificação anual da escola para a disciplina de Matemática, assim como, alguns resultados de investigações (Tall e Vinner (1981)). Neste sentido, penso que a unidade didática reflete adequação ecológica.

Resumindo, perante todas componentes anteriormente descritas, e a complexidade subjacente as mesmas, de uma forma geral posso concluir que houve adequação didática na planificação e implementação da unidade didática.

6.3. Reflexão Final

Nesta reflexão pretendo salientar aspetos relativos ao desenvolvimento deste trabalho, as suas contribuições para o meu enriquecimento na condição de futura profissional, assim como, contribuições a nível pessoal. Farei também referência a algumas limitações subjacentes à sua realização e em que medida este pode servir para investigações futuras.

A realização deste estudo revela que apesar de os resultados aqui obtidos não serem passíveis de uma generalização, devido ao caráter qualitativo ao qual atende a investigação, penso que de uma forma geral a metodologia adotada foi a adequada, trazendo vantagens não só ao nível do meu enriquecimento pessoal, como também, para a comunidade de professores de Matemática e para os alunos visados. Neste estudo, salienta-se a importância da adequação didática no processo de ensino e aprendizagem da matemática, pois contribui com ferramentas essenciais de análise e avaliação, e consequentemente, apela à reflexão constante do professor sobre a sua prática pedagógica (Godino, 2011).

As contribuições deste estudo a título pessoal, refletem-se na oportunidade que tive de aprofundar os meus conhecimentos ao nível da planificação de sequências didáticas, assim como, sobre as potencialidades das tecnologias no desenvolvimento de raciocínio matemático nos alunos. As investigações levadas a cabo por David Tall (1981) e Shlomo Vinner (1981) desempenharam para mim um importante marco neste estudo na forma como se deve privilegiar várias representações de um determinado conceito matemático por forma a que o aluno enriqueça o *conceito imagem* do mesmo, e se consiga assim chegar a abstração inerente a formalização desses conceitos.

Para a comunidade de professores de Matemática, o presente estudo pretende contribuir com uma sugestão de abordagem do conceito de derivada, onde a integração das tecnologias nas tarefas deve ser encarada como uma forma de promover aprendizagens significativas aos alunos.
Neste sentido, o professor deve manifestar alguma abertura e flexibilidade nas suas práticas pedagógicas para a inovação pedagógica e inovação tecnológica sem nunca deixar de ter presente

a clareza da sua intenção pedagógica. Visa também aprofundar conhecimento sobre o ensino e aprendizagem do conceito de derivada, e salientar as dificuldades que os alunos sentem na aprendizagem deste conceito, como forma, de melhorar as suas práticas pedagógicas.

Relativamente aos alunos visados neste estudo, penso que a natureza das tarefas propostas na unidade didática; a integração de alguma inovação ao nível dos recursos utilizados, em concreto o *applet*; o tentar estabelecer sempre que possível conexão com outras áreas do saber, assim como, o fato de se ter salientado aspetos relacionados com a História da Matemática, fomentou nestes um maior interesse, empenho e participação no desenvolvimento desta unidade didática. Penso que, fatores como a resolução de tarefas a pares onde se assistiu a uma forte partilha de ideias e os momentos criados em turma para discussão e respetivas conclusões acerca das tarefas até então desenvolvidas, se revelaram pontos fortes no seu processo de ensino e aprendizagem, contribuindo para que as suas aprendizagens fossem mais significativas e mais consistentes.

Na realização deste estudo, devo confessar que as dificuldades sentidas foram bastantes. Para começar, posso referir a inexperiência e a lacuna numa formação mais orientada para a investigação, fatores que considero já por si mesmos limitativos quando somos confrontados com a realização de um trabalho de natureza investigativa. Em segundo lugar posso mencionar o tempo de que se dispõe para realizar esta investigação, contrariamente ao processo antes de Bolonha, onde estes trabalhos pressuponham dois anos para a sua elaboração, o primeiro orientado para a pesquisa e elaboração/planificação da unidade didática e o segundo para implementação, análise de resultados e respetivas conclusões, este nosso estudo tem apenas a duração de um ano letivo e é desenvolvido em simultâneo com a Prática de Ensino Supervisionada, que é uma cadeira que exige bastante tempo e dedicação por parte do estagiário, e onde constantemente existem trabalhos em curso, o que nos permite concluir que a profundidade inerente a este trabalho de investigação encontra-se de alguma forma comprometida. Contudo, saliento aqui a importância de ambas as orientadoras, pedagógica e científica, no processo investigativo onde a cooperação, partilha e sugestões se revelaram essenciais no desenvolvimento do mesmo.

Um outro fator limitativo neste estudo, diz respeito aos instrumentos de recolha dos dados. Não nos foi possível proceder a gravações aquando da implementação da unidade didática, levando-me a concluir que ideias importantes possam ter sido perdidas. Em concreto, visto as tarefas prossuporem o trabalho a pares, teria sido interessante analisar os raciocínios levados a cabo pelos alunos, a forma como ambos interagiam, se ambos se encontravam sobre a mesma linha de raciocínio ou bem pelo contrário, quais os argumentos por eles utilizados para persuadir o outro, são alguns exemplos de ideias que não são passíveis de análise neste estudo. Se o fator tempo não tivesse sido limitativo, gostaria de ter tido a oportunidade de realizar entrevistas aos alunos, numa tentativa de compreender estes seus raciocínios e resoluções colmatando assim esta falha. Relativamente às notas de campo, posso dizer que também senti algumas dificuldades na recolha das mesmas, uma vez que, em contexto de sala de aula é difícil assumir única e exclusivamente o papel de investigadora. Devo referir também, que o fato de não haver muitos estudos realizados sobre o conceito de derivada conduziu a limitações ao nível do referencial teórico, assim como, na discussão dos resultados.

Em jeito de síntese, saliento a importância que os professores têm na integração das tecnologias nas suas práticas pedagógicas como forma de promoverem através de uma *abordagem natural* a construção de *conceitos formais* nos alunos.

Referências Bibliográficas

Amorim, L. (2011). *(Re)construindo imagens e definições conceituais de limites: contribuições para professores de análise em cursos de licenciatura em matemática*. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto. Retrieved from http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/Produto%20Educacional%20Lilian%20Amorim.pdf

Aragão, F. P. R. A. (2012). Uso do computador como instrumento de desenvolvimento do pensamento matemático na educação. In *CEFET*, Minas Gerais. Retrieved from http://www.senept.cefetmg.br/galerias/Anais_2010/Artigos/GT10/USO_DO_COMPUTADOR.pdf

Ávila, G. (1993). *Introdução à análise matemática*. São Paulo: Editora Edgard Biucher Ltda.

Basilio, A. (2006). *Método no tradicional en la construcción de la recta tangente de funciones elementales*. Tese de Licenciatura, Universidad Veracruzana, Veracruz. Retrieved from http://www.uv.mx/facmate/licenciatura/tesis_presentadas/Hernandez_Basilio_Alejandro.pdf

Bers, L. (1972). *Calculo diferencial e integral* (Vol.1). México: Nueva Editorial Interamericana.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Boyer, C. B. (1999). *História da matemática* (E. F. Gomide, Trans.). São Paulo: Editora Edgard Biucher Ltda.

Carvalho, L. M., Giraldo, V., Tall, D. O. (2003). Using theoretical computational conflicts to enrich the concept image of derivative. *Research in Mathematics Education,* vol. 5, pp. 63 – 78. Retrieved from http://wrap.warwick.ac.uk/477/1/WRAP_Tall_dot2003e-giraldo-etc-rme.pdf

Chizzotti, A. (2003). A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evolução e desafios. *Revista Portuguesa de Educação*, *16(2)*, 221 – 236. Retrieved from http://redalyc.uaemex.mx/pdf/374/37416210.pdf

Davis, S., Anton, H., Bivens, I. (2007). *Cálculo* (8ª ed.). Porto Alegre: Bookman.

Ferreira, J. C. (1999). *Introdução à análise matemática* (7ª ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Font, V., Contreras, Á., Luque, L., Ordónez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoria de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *25(2)*, 151-186.

Giraldo, V., Carvalho, L. M. & Tall, D.O. (2002). Theoretical – computational conflicts and the concept image of derivative. *Proceedings of the BSRLM Conference.* Nottingham, England, 22(3), 37 – 42. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002m-giraldo-carv.pdf

Giraldo, V., Carvalho, L. M. & Tall, D. (2003). Descriptions and definitions in the teaching of elementary calculus. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty and J. Zilliox (eds.) *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol.2, pp.445 – 452, Honolulu, USA. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003d-giraldo-carv-pme.pdf

Giraldo, V., Carvalho, L. M. & Tall, D. O. (2003). Conflitos teóricos-computacionais e a imagem conceitual de derivada. In L. M. Carvalho and L. C. Guimarães, *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, vol.1, pp. 153 – 164, Rio de Janeiro, Brasil. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003b-giraldo-carv-rj.pdf

Godinho, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *ACTA SCIENTIAE – Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10(2).* Retrieved from http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_portugues.pdf

Godinho, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educacíon Matemática, 20,* 13 – 31. Retrieved from http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf

Godinho, J. D. (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Paper presented at the XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil. Retrieved from http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernandez, T., Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en education matemática. *Ensenanza de las Ciencias*, 30(2), pp. 163 – 184. Retrieved from http://www.ugr.es/~jgodino/eos/visualizacion_seg%FAn_EOS.pdf

Guerreiro, J. S. (1989). *Curso de análise matemática.* Lisboa: Escolar Editora.

Kendal, M. (2001). *Teaching and learning introductory differential calculus with a computer algebra system*. Tese de Doutoramento, The University of Melbourne, Melbourne. Retireved from http://dtl.unimelb.edu.au/view/action/singleViewer.do?dvs=1353293475493~837&locale=en_US&VIEWER_URL=/view/action/singleViewer.do?&DELIVERY_RULE_ID=7&search_terms=SYS%20=%20000029598&adjacency=N&application=DIGITOOL-3&frameId=1&usePid1=true&usePid2=true

Larson, R., Edwards, B. H. (2003). *Cálculo com aplicações* (6ª ed.). Rio de Janeiro: LCT – Livros Técnicos e Científicos.

Malta, I., Pesco, S., Lopes, H. (2002). *Cálculo a uma variável: derivada e integral* (vol. II). São Paulo: Edições Loyola.

Nacional Council of Teachers of Matemathics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author

National Council of Teacher of Mathematics (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar* (M. Melo, trans.). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Neto, M. (1998). *Abordagem dinâmica da geometria num programa de formação inicial de professores*. Tese de mestrado, Universidade de Aveiro, Aveiro.

Neto, M. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio dedutivo ao nível do ensino secundário: recurso a geometrias planas*. Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro, Aveiro.

Oliveira, D. (2011). *Explorando o conceito de derivada em sala de aula, a partir de suas aplicações e sob uma perspectiva histórica*. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto. Retrieved from http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/Produto%20Educacional%20Daniel.%20final.pdf

Pereira, V. (2009). *Cálculo no ensino médio: uma proposta para o problema da variabilidade*. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. Retrieved from http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/13%20Vinicius%20Pereira.pdf

Pires, J. (2004). *Cálculo diferencial: estudo histórico sobre a evolução do cálculo diferencial no século XVII*. Tese de Mestrado, Universidade de Trás – os – Montes e Alto Douro, Vila Real. Retrieved from http://repositorio.utad.pt/bitstream/10348/6/1/msc_jalpires.pdf

Ponte, J.P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, 3(1), 3-18.Retrieved from http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt%5C94-Ponte(Quadrante-Estudo%20caso).pdf

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria pratica.In GTI (Org), *Reflectir* e *investigar sobre a prática profissional* (pp. 5 – 28). Lisboa: APM. Retrieved from http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte%20(GTI).pdf

Ponte, J. P. d. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11 – 34). Lisboa: APM. Retrieved from http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf

Ponte, J.P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105 – 132. Retrieved from http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte%20(Estudo%20caso).pdf

Ponte, J.P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J. M., Veia, L., & Viseu, F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 20(2), 30 – 74. Retrieved from http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/07%20Ponte-Guerreiro%20etc%20Minho%20_Out%202007_.pdf

Ponte, J.P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. G., Oliveira, P.A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação. Retrieved from http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/028_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf

Roorda, G., Vos, P., Goedhart, M. (2007). Derivatives in applications: how to describe students' understanding. Paper presented at *5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Lanarca, Cyprus. Retrieved from http://ermeweb.free.fr/CERME%205/WG13/13_Roorda.pdf

Silva, J.C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M. C. & Lopes, I. M. C. (2001). *Matemática A – 10º ano* . Lisboa: Ministério da Educação. Retrieved from http://www.dgidc.min-edu.pt/data/ensinosecundario/Programas/matematica_a_10.pdf

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C.M. C. & Lopes, I. M. C. (2002). *Matemática A – 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação. Retrieved from http://www.dgidc.min-edu.pt/data/ensinosecundario/Programas/matematica_a_11.pdf

Skovsmose, O. (2001). *Educação matemática crítica: a questão da democracia*. Campinas, SP: Papirus.

Stein, M. K., Smith, M. S. (1998). *Tarefas matemáticas como um quadro para reflexão: da investigação à prática*. [traduzido de Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4), 268 - 275].

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151 – 169. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1981a-concept-image.pdf

Tall, D. (1989). Concept images, generic organizers, computers & curriculum change. *For the Learning of Mathematics*, 9(3), 37 – 42. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1989e-conim-genorg-flm.pdf

Tall, D. O. (2000). Biological brain, mathematical mind and computational computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). *Plenary Presentation for ATCM Conference*, Chang Mai, Thailand. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000h-plenary-atcm2000.pdf

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2&3), 199 – 238. Retrieved from http://wrap.warwick.ac.uk/476/1/WRAP_Tall_dot2001p-esm-infinity.pdf

Tall, D. (2003). Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. In L. M. Carvalho and L. C. Guimarães *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, vol.1, pp. 1 – 28, Rio de Janeiro, Brasil. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003a-rio-plenary.pdf

Tall, D. (2003). Concept image and concept definition. In David Tall. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image.html

Tall, D. (2012). A sensible approach to the calculus. To appear in *Handbook on Calculus and its Teaching*, ed. François Pluvinage & Armando Cuevas. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2012z-sensible-calculus.pdf

Tall, D. (2012). The evolution of technology and the mathematics of change and variation. To appear in Jeremy Roschelle & Stephen Hegedus (eds), *Democratizing Access to Important Mathematics through Dynamic Representations: Contributions and Visions from the SimCalc Research Program*. Springer. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2012t-simcalc_technology_perspective.pdf

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., Nápoles, S. M. (1998). Funções: 11º ano de escolaridade. Lisboa: Ministério da Educação. Retrieved from http://www.dgidc.min-edu.pt/outrosprojetos/index.php?s=directorio&pid=148

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In David Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 65 – 81. Retrieved from http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaemIngles/articulos/universitario/conocimiento/The%20Role%20of%20definitions%20in%20the%20Teaching%20and%20Learning%20of%20Mathematics.*Vinner,%20Shlomo.%20*Vinner,%20Shlomo.%20The%20role%20of%20definitions%20in%20the%20teaching%20and%20.pdf

Anexos

Anexo 1 – Planificação da unidade didáctica: *Taxa de Variação e Derivada*

Disciplina	Matemática
Tema	Introdução ao cálculo diferencial I
Unidade	Taxa de Variação e Derivada

Ano Lectivo	2010/2011
Turma	11.º D
Duração	8 blocos de 90 minutos

Pré-requisitos	▪ Declive de uma recta ▪ Equação reduzida de uma recta ▪ Recta secante ▪ Recta tangente

Objectivos Gerais	▪ Definir e calcular a taxa média de variação num intervalo $[a, b]$ ▪ Calcular a taxa de variação instantânea ▪ Interpretar geometricamente a taxa de variação ▪ Definir derivada de uma função num ponto ▪ Relacionar o sinal da derivada com a monotonia ▪ Calcular derivadas de funções: - Afim - Polinomial de 2.º e 3.º grau - Racional (1.º grau) ▪ Resolver problemas de optimização
Temas Transversais	▪ Aplicações Matemáticas ▪ Comunicação Matemática ▪ História da Matemática ▪ Raciocínio Matemático ▪ Resolução de Problemas e Tarefas exploratórias ▪ Tecnologia e Matemática

Recursos	▪ Calculadora Gráfica ▪ Computador - *Applet* - PowerPoint - Simulador da calculadora gráfica ▪ Fichas de trabalho ▪ Manual do aluno

Anexo 2 – Tarefa "Taxa média de variação. Derivada num ponto – interpretação geométrica"

Matemática A

11º D

17 de Março de 2011

Taxa média de variação. Derivada num ponto – Interpretação geométrica *Formato:* Tarefa de exploração

NOMES: **GRUPO:**

1 - A previsão da temperatura numa estância de ski entre as 0 e as 8h de um certo dia é dada por:

$$c(t) = 0,5t^2 - 4t$$

onde c representa a temperatura em graus centígrados e t, o tempo decorrido em horas.

(a) Com auxilio da calculadora gráfica, esboça o gráfico c(t).

(b) No contexto do problema, estuda a função quanto à monotonia e a existência de extremos relativos.

<u>Definição:</u> Chama-se *variação* ou *acréscimo* de uma função f no intervalo $[a,b]$ à diferença $f(b) - f(a)$.

(c) Estuda a variação da função temperatura, hora a hora, completando a seguinte tabela:

$[t_0, t]$	$c(t) - c(t_0)$
[0, 1]	
[1, 2]	
[2, 3]	
[3, 4]	
[4, 5]	
[5, 6]	
[6, 7]	
[7, 8]	

(d) Qual a variação média da temperatura no intervalo [0,6]?

<u>Definição</u>: A *taxa média de variação* de uma função f no intervalo [a, b], é dada por:

$$t.m.v._{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(e) Calcula $t.m.v_{[0,6]}$ e compara o valor com aquele que obtiveste no cálculo da variação média.

2 - Com o aproximar da primavera houve um aumento da temperatura. Como tal, foi preciso recorrer-se a um canhão de produção de neve artificial para assegurar o funcionamento da estância de ski. Fixando a posição e o ângulo de orientação do canhão, o percurso do jacto de neve é descrito por:

$$j(t) = -0.5t^2 + 5t \text{ , } 0 \leq t \leq 10$$

onde t é tempo decorrido em segundos e $j(t)$ está definido em metros.

Para responderes às questões que se seguem, recorre ao applet que se encontra em http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Derivada_de_una_funcion/Derivada_de_una_funcion.htm.

Uma vez iniciada a aplicação, define a função j, recorrendo às seguintes instruções:

- Clica em "config" no canto superior direito da aplicação;
- Selecciona "Auxiliares" e define a função;
- A janela pode ser ajustada na barra superior da aplicação

(a) Compara a taxa média de variação nos intervalos [1, 3] e [6, 8]. Qual o significado físico dos valores obtidos?

(b) Calcula a taxa média de variação da função j em intervalos sucessivos do tipo [3,3+h], com h a tender para zero, completando a seguinte tabela.

Sugestão: No applet, define como abcissa o valor 3 e h corresponde ao "incremento".

h	1	0,5	0,2	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
$\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$									

(c) Qual o significado geométrico e físico da taxa média de variação no intervalo $[3, 3+h]$?

(d) Conjectura o valor para o qual tende a expressão $\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$, quando h tende para zero, e interpreta geométrica e fisicamente o seu significado.

(e) Explorando o applet, interpreta geometricamente o que acontece quando h se aproxima de zero por valores negativos. Que concluis?

O valor para que tende a expressão $\frac{j(3+h)-j(3)}{h}$ quando h tende para zero, representa a taxa de variação de j no instante $t = 3$, também designada por ***derivada*** da função j no ponto de abcissa 3.

Definição: Chama-se derivada de uma função f em x_0 , e representa-se por $f'(x_0)$, ao número, se existir, para que tende

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

quando h tende para zero.

NOTA: Caso a derivada no ponto de abcissa x_0 seja finita, a função diz-se diferenciável nesse ponto.

Anexo 3 – Tarefa "Taxa média de variação. Derivada num ponto - Aplicação"

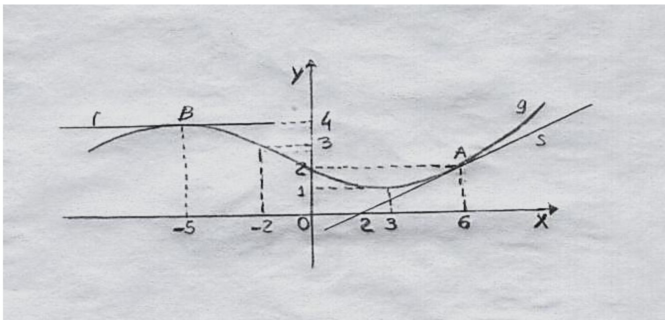
Matemática A

11º D

22 de Março de 2011

Taxa média de variação. Derivada num ponto   <u>*Formato:*</u> Tarefa de aplicação   <u>*Modalidade:*</u> Trabalho a pares

1. Considere-se o gráfico de uma função g e as rectas r e s tangentes ao gráfico nos pontos B e A, respectivamente



1.1. Calcula a taxa média de variação no intervalo [-5, -2].

1.2. Determina a taxa de variação de g para $x = -5$.

1.3. Indica um intervalo onde a taxa média de variação é positiva.

1.4. Comenta a seguinte condição:

$$g'(6) > g'(-2)$$

1.5. Determina as equações reduzidas das rectas r e s.

2. Uma bola é lançada de baixo para cima. A altura que a bola atinge é dada, em metros, por $a(t) = 10t - 4t^2$, t segundos depois de ser lançada. Determina a velocidade da bola ao fim de 1 segundo.

3. Considera a função $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

Escreve a equação reduzida da recta tangente ao ponto de abcissa 2.

4. Determina o valor do declive da recta tangente ao gráfico da função $g(x) = -2x^2 + 1$, no ponto de ordenada -1 e abcissa negativa.

5. Uma nódoa circular de tinta é detectada sobre um tecido.

O comprimento, em centímetros, do raio dessa nódoa, t segundos após ter sido detectada, é dada por:

$$r(t) = \frac{1+3t}{4+t}, t \geq 0$$

Determina a taxa de propagação da nódoa ao fim de 5 segundos. Interpreta o valor obtido, no contexto do problema.

Anexo 4 – Tarefa "Derivada num ponto - Aplicação"

Matemática A

11º D

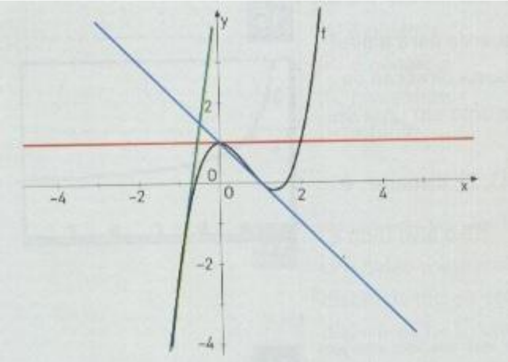
22 de Março de 2011

Derivada num ponto *Formato:* Tarefa de aplicação *Modalidade:* Trabalho a pares

Grupo I

1. Na figura seguinte, está representada graficamente uma função f, polinomial de grau três, e as rectas tangentes ao gráfico nos pontos de abcissa -1, 0 e 1.

Sejam $a = f'(-1), b = f'(0)\ e\ c = f'(1)$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?



(A) a<0, b<0,c= 0

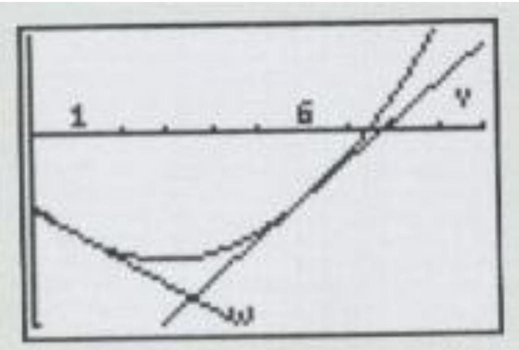
(B) a<0,b= 0, c<0

(C) a>0, b<0,c= 0

(D) a>0, b= 0, c<0

2. Na figura a baixo estão representadas:

- parte do gráfico da função g;
- a recta w, tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 e de equação $y = -0.8x - 2.4$;
- a recta v, tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 6.



As rectas $w\ e\ v$ são perpendiculares.

Então, o valor de $g'(6)$ é:

(A) $-\frac{5}{4}$

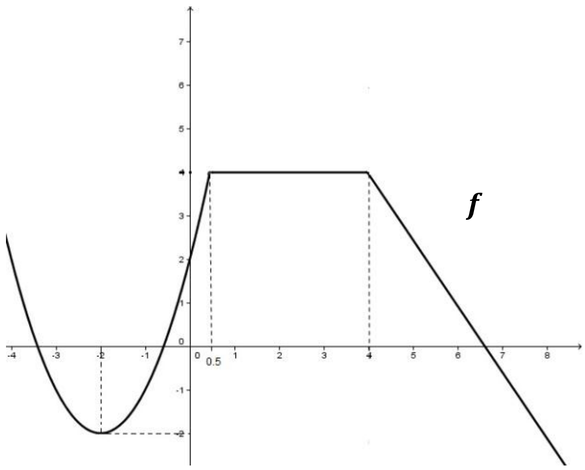
(B) -1

(C) 1

(D) $\frac{5}{4}$

Grupo II

1. Na figura seguinte está representado o esboço do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$.



1.1. Indica os subconjuntos do domínio onde a função admite derivada:

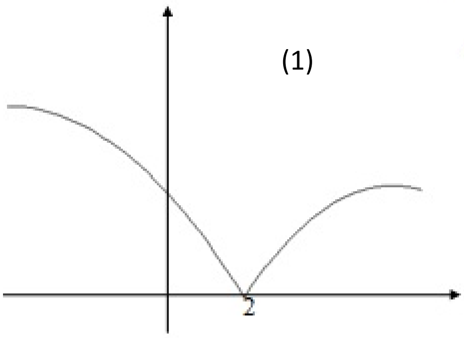
(a) Positiva;

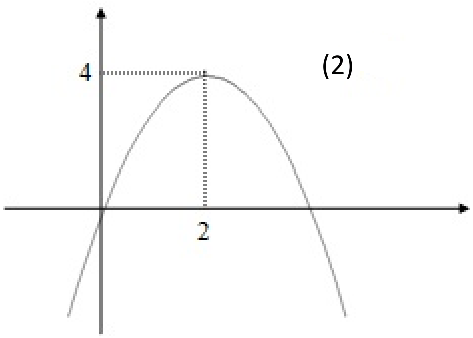
(b) Negativa;

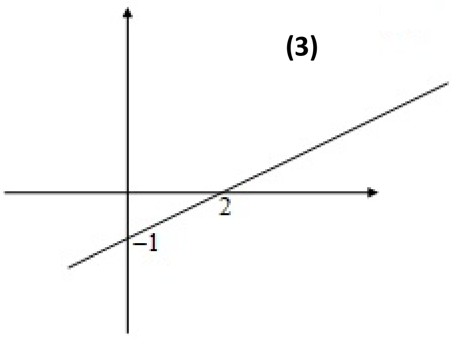
(c) Nula.

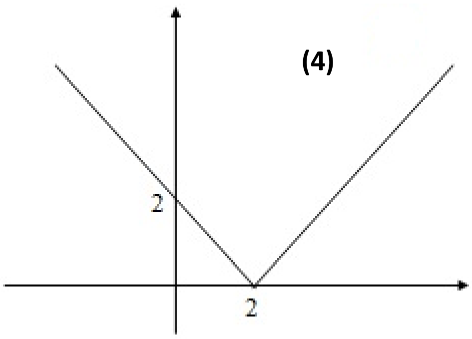
1.2. Diz, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação: "A função f admite derivada em todos os pontos do seu domínio".

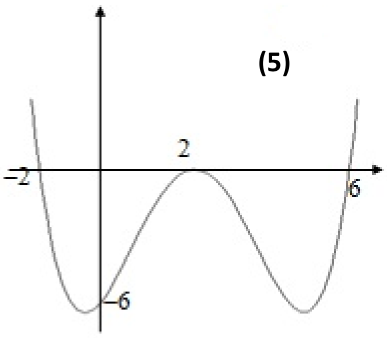
2. Observa os gráficos:

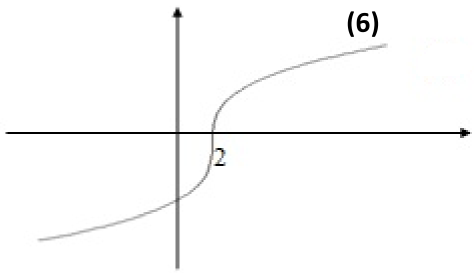












(in Brochura 11º ano de Funções, Ministério da Educação)

Indica se as funções são ou não diferenciáveis no ponto de abcissa 2. Em caso afirmativo, indica o valor da derivada nesse ponto.

Nota: Uma função f diz-se diferenciável num ponto, quando admite derivada finita nesse ponto.

Anexo 5 – Tarefa "Função Derivada"

Matemática A

11º D

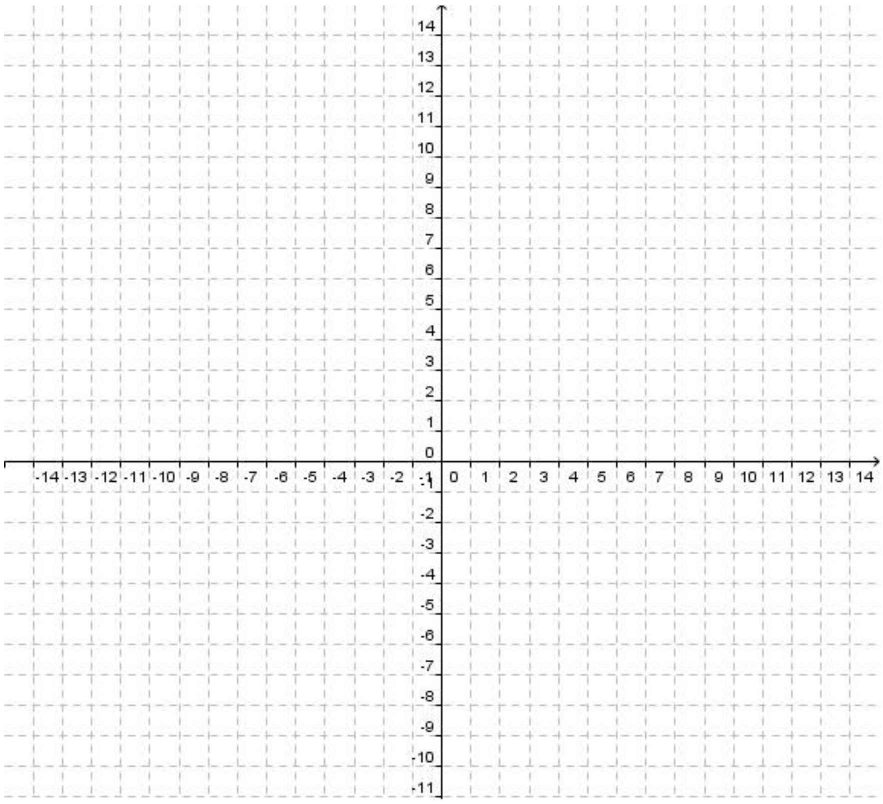
24 de Março de 2011

Função Derivada
Formato: Tarefa de exploração
Modalidade: Trabalho a pares

1. Num laboratório foi estudada a evolução de uma colónia de bactérias até à sua extinção. Verificou-se que o número f de bactérias, em milhares, x horas após o início da contagem, é dada por:

$$f(x) = -x^2 + 4x + 9$$

1.1. Obtém, na calculadora, uma representação gráfica desta função e no contexto do problema esboça-o no referencial a seguir.



1.2. Recorrendo à ferramenta "dy/dx" (2nd + CALC), completa a tabela seguinte, com os valores de $f'(x_i)$, derivada de f em x_i.

$\boldsymbol{x_i}$	**1/2**	**1**	**3/2**	**2**	**5/2**	**4**
$\boldsymbol{f'(x_i)}$						

1.3. Traça a recta que contém os pontos de coordenadas $(x_{i,}\ f'(x_i))$ no referencial acima. Determina a sua equação reduzida.

A recta que definiste é a representação gráfica da *<u>função derivada</u>* de f, isto é, a função que faz corresponder a cada valor x_i , o número real $f'(x_i)$.

1.4. No contexto do problema, indica o domínio e interpreta o significado físico da função que definiste na alínea anterior.

Anexo 6 – Tarefa "Derivadas da função afim, função polinomial do 2.º e 3.º grau e função racional do tipo $\frac{k}{x}$"

Matemática A

11º D

31 de Março de 2011

Derivadas da função afim, função polinomial do 2.º e 3.º grau e função racional do tipo $\frac{k}{x}$ ***<u>Formato:</u>*** Tarefa de exploração ***<u>Modalidade:</u>*** Trabalho a pares

1. Deduz a expressão da função derivada das seguintes funções:

(a) Função afim, $f(x) = mx + b, \; com \; m, b \in \mathbf{R} \; e \; m \neq 0$

(b) Função constante, $f(x) = k, \; com \; k \in \mathbf{R}$

(c) Função quadrática do tipo $f(x) = ax^2, \; com \; a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

(d) Função polinomial do 2.º grau, $f(x) = ax^2 + bx + c, \; com \; a, b, c \in \mathbf{R} \; e \; a \neq 0$

(e) Função cúbica do tipo $f(x) = ax^3, \; com \; a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

(f) Função racional do tipo $f(x) = \dfrac{k}{x}, com \; k, x \in \mathbf{R} \; e \; x \neq 0$

2. Deriva as seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{4}x + 5$ **(b)** $f(x) = \pi$ **(c)** $f(x) = \dfrac{7}{5}x^3$

(d) $f(x) = 2x - 3$ **(e)** $f(x) = -\dfrac{5}{x}$ **(f)** $f(x) = x$

(g) $f(x) = x(2x+1)$ **(h)** $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{2}x}{3}$ **(i)** $f(x) = (\dfrac{3}{4}x + 5)^2 (x - 2)$

(j) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \sqrt{11}$ **(k)** $f(x) = -(x-2)^2$ **(l)** $f(x) = 3 + \dfrac{2}{x}$

(m) $f(x) = 1 - 4x$ **(n)** $f(x) = -\dfrac{5}{4}x^2 + \dfrac{7}{3}$ **(o)** $f(x) = \sqrt{2}x^2 + (x^2 + 5)(x - \dfrac{1}{2})$

Nota: A derivada da soma de duas funções é a soma das derivadas $(f + g)' = f' + g'$

Anexo 7 – Tarefa “Derivadas da função afim, função polinomial do 2.º e 3.º grau e função racional do tipo $\frac{k}{x}$ - Aplicação”

Matemática A

11º D

1 de Abril de 2011

Derivadas da função afim, função polinomial do 2.º e 3.º grau e função racional do tipo $\frac{k}{x}$ ***Formato:*** Tarefa de aplicação ***Modalidade:*** Trabalho a pares

GRUPO I

1. Um balão meteorológico é lançado e sobe verticalmente de modo que a sua distância $d(t)$ ao solo durante os primeiros 10 segundos de voo é dada por $d(t) = 6 + 2t + t^2$, onde $d(t)$ é medido em metros e t em segundos.

A velocidade instantânea do balão, quando $t = 1s$ é:

(A) $-4ms^{-1}$ **(B)** $-3{,}9ms^{-1}$ **(C)** $3{,}9ms^{-1}$ **(D)** $4ms^{-1}$

2. A recta de equação $y = x$ é tangente ao gráfico de uma função f, no ponto de abcissa 0. Qual das expressões seguintes pode definir a função f.

(A) $x^2 + x$ **(B)** $x^2 + 2x$ **(C)** $x^2 + 2x + 1$ **(D)** $x^2 + x + 1$

GRUPO II

1. Seja f a função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c, com\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\ e\ b, c \in \mathbb{R}$. Mostra, recorrendo ao conceito de função derivada, que a abcissa do vértice da parábola, imagem geométrica de f, é $-\frac{b}{2a}$.

2. Sendo g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = x^3 - 6x + 1$. Determina a equação da recta tangente t, ao gráfico de g no ponto de abcissa 2.

3. Determina as coordenadas do ponto do gráfico da função h, definida por

$$h(x) = x^2 - 4x + 17,$$

sabendo que:

(a) A recta tangente ao gráfico de h nesse ponto é perpendicular à recta de equação $4y = -x - 3$

(b) A recta tangente ao gráfico de h nesse ponto tem de inclinação $45°$.

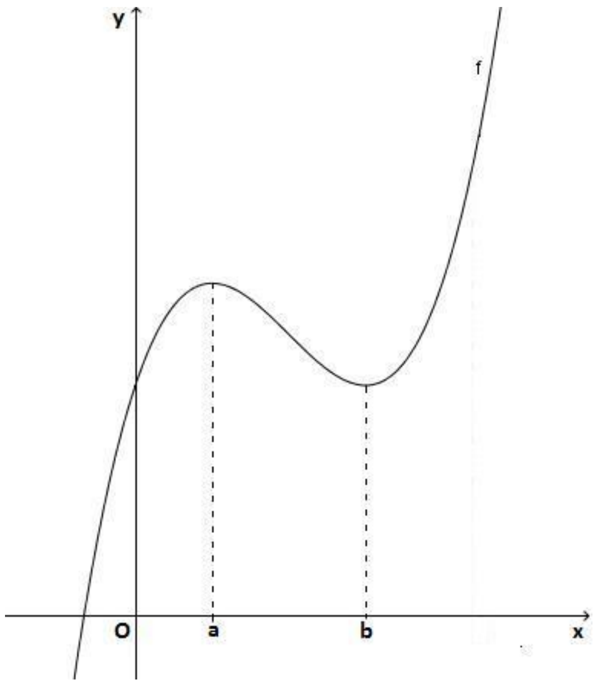
Anexo 8 – Tarefa "Sentido de variação e extremos de uma função"

Matemática A

11º D **5 de Abril de 2011**

Sentido de variação e extremos de uma função *<u>Formato:</u>* Tarefa de exploração *<u>Modalidade:</u>* Trabalho a pares

1. Considere-se o seguinte gráfico:



1.1. Por observação do gráfico, preenche a seguinte tabela:

Intervalo	Sinal do declive da recta tangente nos pontos do intervalo	Sinal da função derivada nos pontos do intervalo	Sentido de variação da função (monotonia)
$]-\infty, a[$			
$]a, b[$			
$]b, +\infty[$			

1.2. Qual o valor da função derivada nos pontos de abcissa a e de abcissa b?

1.3. Admite que a expressão que define a função representada graficamente é

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 3$$

1.3.1. Determina $f'(x)$.

1.3.2. Estuda analiticamente o sinal de $f'(x)$ e compara as respostas dadas em **1.1.** e **1.2.**

1.4. Com base no estudo feito, conjectura uma relação entre o sinal da função derivada num intervalo aberto e o sentido de variação da função neste intervalo.

1.5. Com base nas conclusões da alínea anterior, preenche a seguinte tabela com os zeros e sinal de f' e com os extremos e a monotonia de f.

Qual a relação que parece existir entre os zeros da derivada e os extremos da função?

x					
f'					
f					

2. Usa a função derivada para estudar, quanto à monotonia e existência de extremos, as funções a seguir definida:

2.1. $f(x) = x^2 - 5x + 2$ em $\mathbb{R}$

2.2. $g(x) = x^3 - 2x$ em $\mathbb{R}$

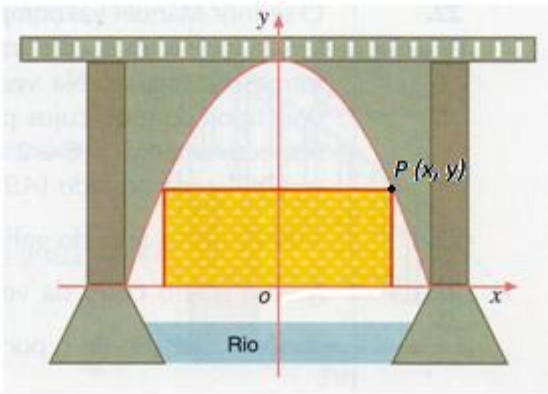
Anexo 9 – Tarefa “Problemas de otimização”

Matemática A

11º D **7 de Abril de 2011**

Problemas de otimização
Formato: Tarefa de aplicação
Modalidade: Trabalho a pares

1. A figura representa uma ponte sobre o rio que atravessa uma localidade. O arco da ponte é definido pela função $f(x) = -0.075x^2 + 30$ no referencial da figura cuja unidade de comprimento é o metro. O ponto P de coordenadas (x, y) desloca-se ao longo do arco da ponte tal que $x \in]0, 20[$ e $y \in]0, 30[$.



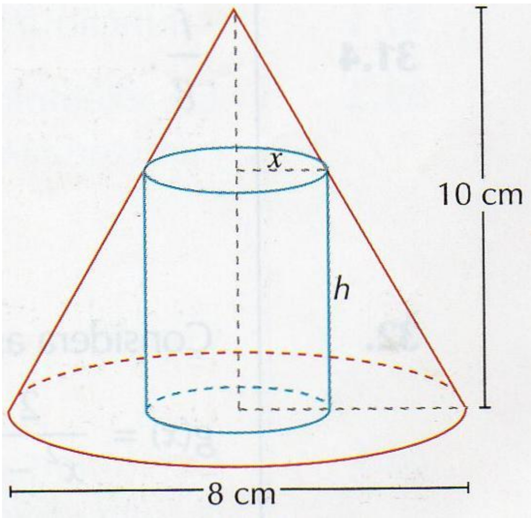
Aproxima-se a data do 25.º aniversário da ponte e a comissão encarregada dos festejos pretende colocar na ponte um painel alusivo ao acontecimento, como sugere a figura.

(a) Determina, com aproximação às décimas, a área máxima que o painel poderá ter.

(b) Os técnicos sugeriram a colocação de luzes ao longo de três dos lados (laterais e superior) do painel. Para que dimensões do painel, o custo das luzes é máximo?

Apresenta o resultado aproximado às décimas do metro e nos cálculos intermédios usa valores aproximados às centésimas.

2. A partir de um cone de madeira com 10 cm de altura e 8 cm de diâmetro de base pretende-se construir um cilindro. Designa por x o raio do cilindro e por h a altura.



(a) Mostra que:

i. $h = \frac{40 - 10x}{4}$

ii. $V = -\frac{5}{2}\pi x^3 + 10\pi x^2$, em que V representa o volume do cilindro

(b) Determina as dimensões do cilindro para que o volume seja máximo.